0-ПОПУЛЯРНАЯ
ЛИОТЕКА.

Проф. Г. В. Вульф.

СИММЕТРИЯ
и
ЕЕ ПРОЯВЛЕНИЕ В ПРИРОДЕ.

С 100 чертежами и рисунками.

Издание второе.

Государственное Издательство.
Москва.—1919.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ
БИБЛИОТЕКА.

Проф. Г. В. Вульф.

СИММЕТРИЯ

и

ЕЕ ПРОЯВЛЕНИЕ В ПРИРОДЕ.

Издание второе.

Литературно-Издательский Отдел
Народного Комиссариата по Просвещению.
Москва.—1919.

Право издания книги **Г. В. Вульфа „Симметрия и ее проявление в природе“** приобретено в собственность Литературно-Издательского Отдела Народного Комиссариата по Просвещению на 5 лет, по 1 июня 1924 года.

Никем из книгопродавцев указанная на книге **цена не может быть повышена** под страхом ответственности перед законом страны.

Заведующий Лит.-Изд. Отд. Нар. Ком. Просв.

П. И. Лебедев-Полянский.

1 июня 1919 года.

Москва.

Типография Т-ва И. Д. Сытина, Пятницкая улица, свой дом.

1919.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Содержание этой книги составляет лишь несколько распространенное изложение четырех часовых лекций, читанных в народном университете, в Москве, в одной из аудиторий Политехнического музея, весною 1907 г. Обширность предмета заставила меня коснуться лишь самой его сути и остановиться только на самых важных и наиболее разработанных его сторонах. Насколько обширен предмет, читатель может судить уже по одному тому, что в него входит целиком все учение о кристаллах, занимающее в этой книге лишь одну из четырнадцати ее глав. Очевидно, что, оставаясь в рамках четырехчасовой лекции, можно было лишь самыми основными штрихами начертать картину свойств кристаллов.

Около половины книги составляет изложение учения о симметрии,—предмета чисто математического характера. Общедоступное изложение подобного предмета представляет далеко не легкую задачу и зачастую не может быть проведено с желаемою точностью и полнотою, в особенности же в тех тесных рамках, в которые мне пришлось заключить свои лекции.

Все эти трудности, с которыми мне пришлось бороться, заставляют меня опасаться, что в этой книге найдется немало недочетов, и я надеюсь, что они послужат смягчающими мою вину обстоятельствами при оценке моего труда критикой.

Мне может быть сделан упрек, что способ изложения, которого я держался в этой книге, не доведен до той простоты, какая желательна в лекциях, читаемых в народном университете, и к какой я сам стремился в своих чтениях слушателям народного университета. Надо, однакоже, принять в расчет, что лекции эти и не были строго рассчитаны исключительно на слушателей народного университета: они читались в пользу народного университета и представляют из себя попытку в обыкновенном смысле популяризировать одну из отраслей нашего знания.

Считаю необходимым отметить, что некоторые места книги представляют изложение моих личных взглядов. Такова теория симметрии, основанная на принятии плоскости симметрии за основной элемент симметрии, такова же и формулировка аналогии между расположением листьев на стебле растений и граней и ребер на кристалле.

Москва, 15 мая 1908 г.

Проф. *Г. Вульф.*

I.

Введение.

Сколько существует таких понятий, которыми мы пользуемся на каждом шагу, которыми мы иногда с успехом руководимся в наших размышлениях и поступках, но истинного содержания которых мы себе не представляем! Мы пользуемся этими понятиями иногда чисто интуитивно, чутьем угадывая их содержание, и если бы от нас вдруг потребовали отчетливого, вполне точного логического определения таких понятий, мы были бы весьма озадачены и удивлены нашим бессилием дать определенный ответ.

Но мы были бы неправы, если бы стали в данном случае всецело пенять на собственное легкомыслие и невежество: есть понятия, с которыми мы так свыклись в жизни и которые мы считаем такими простыми, что, казалось бы, и говорить много о них совершенно не стоит, однакоже эти понятия оказываются на деле иногда до того сложными, что для полного раскрытия их содержания необходимы были соединенные усилия многих человеческих поколений, длившиеся иногда многие и многие века. За примерами итти далеко не надо. Вспомним, как мы легко обращаемся с выражением «солнце встает и садится», и вспомним, сколько наблюдательности и упорного векового труда стоило человечеству раскрыть истинное значение этих простых выражений, и все сказанное выше не потребует никаких дальнейших разъяснений. К числу таких ходячих понятий, с которыми мы сроднились в обыденной жизни, принадлежит и понятие о симметрии. Мы с уверенностью говорим о симметричном или несимметричном расположении предметов в комнате, о симметричности или несимметричности здания и проч., даже можем привести вполне убедительные доводы в пользу справедливости нашего утверждения, но мы или вовсе не в состоянии будем дать вполне сознательное и верное определение симметрии, или, если и дадим его, то оно, наверное, окажется далеко не исчерпывающим всего этого понятия. Между тем никто не станет спорить, что понятие о симметрии играет в высшей степени важную роль как в природе, так и в нашей жизни. Мы удивляемся и восхищаемся симметрией снежинки, цветка, морской звезды, мы говорим о симметрии здания, даже музыкального произведения; понятие о симметрии составляет одну из составных частей нашего понятия о красоте; мы любим ее в одних предметах и считаем неприятной и неуместной в других. Для того, чтобы пояснить, насколько симметрию каждый понимает вообще по-своему, я приведу такой пример. Что человеческое тело симметрично, что кольцо симметрично, на этот счет, кажется, двух мнений не встретим, но что винт симметричен, против этого, я думаю, возразят очень многие, а между тем, какая же принципиальная разница существует между однообразным чередованием завитков винта и, напр., таким же однообразным чередованием зубцов зубчатого колеса, симметрия которого стоит вне всякого спора?

Можно спросить: насколько важен вопрос о симметрии и о том, как она проявляется в природе? Мы строго различаем вещи более и менее важные и привыкли с этой точки зрения ценить их и в соответствии со степенью важности вещей уделять им больше или меньше интереса и внимания. Нетрудно, однако, убедиться, что этот вопрос не имеет никакого научного содержания и имеет смысл, иногда даже очень большой, лишь в сфере практического приложения наших знаний. Никто, напр., не будет оспаривать важности наших знаний об устройстве вселенной и о движении небесных тел вообще и нашей земли в частности. Однако можно наверное сказать, что наши знания в этой области были бы существенно отличны от теперешних, если бы, напр., земля была не сфероид, а другое, менее симметричное тело. Да и сами бы мы совершенно иначе представляли себе окружающий мир, если бы наше тело состояло не из двух симметричных половин, а было бы, напр., лучисто, как тело морской звезды или кораллового полипа.

II.

Симметрия плоских фигур.

Мы начнем с рассмотрения самых простых случаев неоспоримой симметрии, а затем, выяснивши принцип, лежащий в основе положения симметрии, перейдем к более сложным и на первый взгляд менее очевидным случаям симметрии.

Начнем с фигур, которые мы в состоянии начертить на плоскости, с так называемых плоских фигур.

Вот равнобедренный треугольник *АБВ* (рис. 1),— одна из самых простых фигур, симметрия которых не подлежит сомнению. В чем же заключается ее симметрия? Мы ответим: в том, что справа и слева эта фигура одинакова, или иначе, что фигура состоит из двух одинаковых частей,— правой и левой. Это очень знакомый нам случай симметрии: наше тело состоит из двух одинаковых частей,—правой и ле-

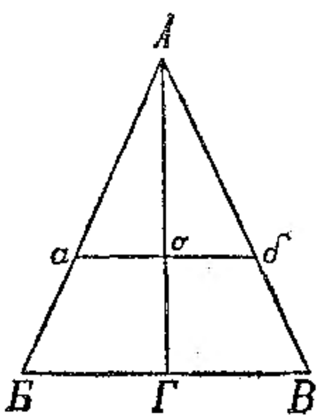

Рис. 1.

вой. Но такой ответ ненаучен. Чтобы удовлетворить строгому требованию научной точности, мы должны сказать, почему мы считаем обе стороны данной фигуры одинаковыми и в чем выражается эта одинаковость.

Разделим нашу фигуру пополам, на две части, которые мы считаем одинаковыми. Для этого нам стоит лишь провести прямую линию *АГ* через вершину *А* и через средину *Г* основания треугольника. Не надо быть знакомым с элементарной геометрией, чтобы понять, что одинаковость обеих половин фигуры состоит в том, что *каждой точке а фигуры, взятой на одной ее стороне, соответствует точка б на другой стороне и притом так, что прямая аб, соединяющая эти две точки, перпендикулярна к линии АГ и делится этой линией АГ пополам в точке о.* Линия *АГ* называется *линией симметрии* данной фигуры. Итак, для того, чтобы получить точку *б* на одной стороне фигуры из соответствующей ей точки *а* на другой, надо точку *а переместить* за линию симметрии и перпендикулярно к этой линии на расстояние, равное расстоянию точки *а* от линии симметрии.

Возьмем другую фигуру *АБВ* (рис. 2), которая представляет из себя пра-

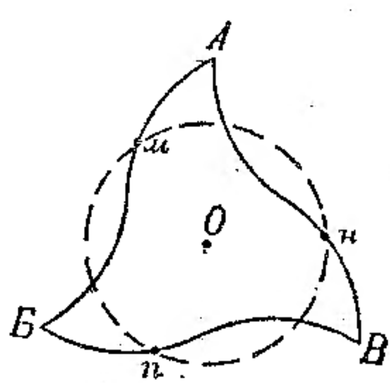

Рис. 2.

вильный треугольник с искривленными сторонами. Эта фигура тоже, несомненно, симметрична. Она состоит из трех вполне одинаковых и одинаково расположенных концов *А*, *Б* и *В*, что и заставляет нас считать ее симметричной. Каждой точке *м* одного конца отвечает точка *н* другого конца и точка *п* третьего, в том числе и вершине *А* отвечают одинаковые с ней вершины *Б* и *В*. Но в данном случае одинаковые точки фигуры получаются одна из другой *вращательным перемещением* точек на один и тот же, одинаковый для всех точек угол, который для взятой фигуры равен трети полного оборота. Таким образом и для этой фигуры симметрия сводится на известный род *перемещения*, но в данном случае этим перемещением является вращение около *центра вращения* фигуры *О*.

Вращая всю фигуру в ее плоскости на угол, при котором совмещаются ее одинаковые точки, мы совмещаем и всю фигуру с самой собою. Этот угол называется *углом совмещения*, а число углов совмещения, приходящееся на полный оборот, называется *порядком* центра вращения. В данном случае фигура обладает центром вращения третьего порядка.

Если центр вращения—четного порядка, то одинаковые точки симметричной фигуры получаются друг из друга еще и иным способом. Возьмем параллелограмм, квадрат и правильный шестиугольник (рис. 3—5). Во всех этих фигурах есть центр вращения: в параллелограмме—второго порядка с углом вращения в пол-оборота, в квадрате — четвертого порядка, с углом вращения в четверть оборота, и в шестиугольнике — шестого порядка, с углом вращения в шестую часть оборота. В каждой из этих и им подоб-

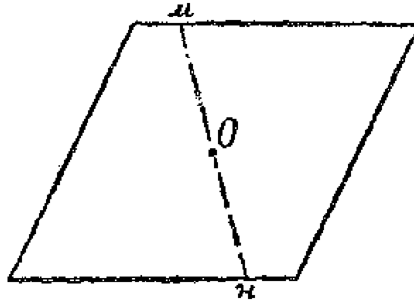

Рис. 3.

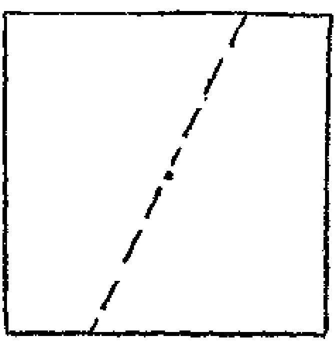

Рис. 4.

ных фигур для получения точки *н*, одинаковой с *м*, следует провести прямую через центр фигуры *О* и по другую сторону центра отыскать точку *н*, расстояние которой от *О* было бы равно расстоянию точки *м* от *О*. Иными словами, переместив точку *м* по прямой *мО* и за точку *О* на расстояние, равное *мО*, мы найдем точку *н* фигуры, одинаковую с *м*. Необходимо только заметить, что в параллелограмме точка *н* будет единственной точкой фигуры, оди-

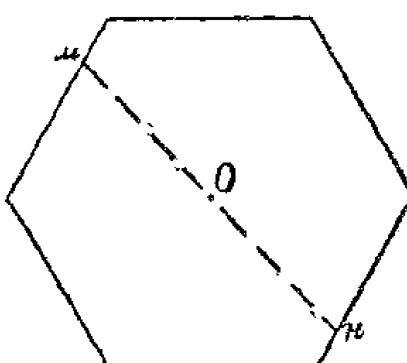

Рис. 5.

наковой с *м*, и указанное перемещение достаточно для того, чтобы найти все одинаковые точки фигуры, тогда как в других фигурах это построение само по себе еще для этой цели недостаточно, так как в квадрате мы имеем три точки, а в шестиугольнике пять точек одинаковых с точкою *м*, избранною для сравнения. Точка *О*, делящая пополам все прямые, по концам которых расположены одинаковые точки симметрической фигуры, называется *центром симметрии* фигуры. Центр симметрии также характеризуется особым видом *перемещения*, помощью которого мы из одной точки фигуры получаем другую, одинаковую с ней точку той же фигуры. Как видно из изложения, центр симметрии и центр вращения плоской фигуры очень тесно связаны друг с другом, и было бы, пожалуй, излишне их различать, но, как увидим, эти два понятия необходимо разделить при описании симметрии пространственных фигур, не плоских.

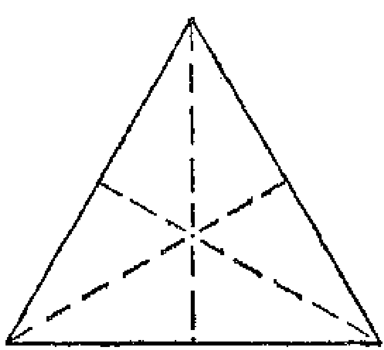

Рис. 6.

Линия симметрии, центр вращения и центр симметрии зовутся *элементами симметрии* плоских фигур, и мы можем все случаи симметрии таких фигур свести к присутствию в этих фигурах одного из указанных трех элементов симметрии или их сочетания, при чем линия симметрии могут быть в самом различном числе, от одной до бесконечности. Приведем примеры.

В правильном треугольнике (рис. 6)—три линии симметрии и центр вращения третьего порядка.

В квадрате (рис. 7) —четыре линии симметрии, центр вращения четвертого порядка и центр симметрии.

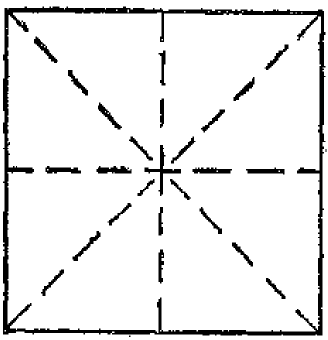

Рис. 7.

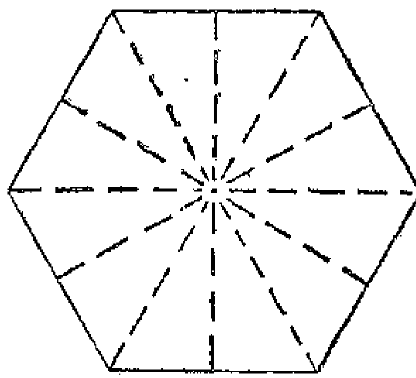

Рис. 8.

В правильном шестиугольнике (рис. 8)—шесть линий симметрии, центр вращения шестого порядка и центр симметрии.

В круге (рис. 9)—сколько угодно линий симметрии, или, как говорят, бесконечное их число, центр вращения какого угодно или, иными словами, бесконечного порядка и центр симметрии.

Итак, мы видим, что симметрию плоских фигур мы свели в каждом случае на известный род *пере-*

мещения. Если принять в расчет впечатление неподвижности и косности, производимое на нас симметриею, то это, пожалуй, может нас на первых порах поразить и даже покажется парадоксальным. Но этот крайне любопытный факт имеет очень простое физиологическое и психологическое объяснение. Ведь симметричный предмет *одинаков с раз-*

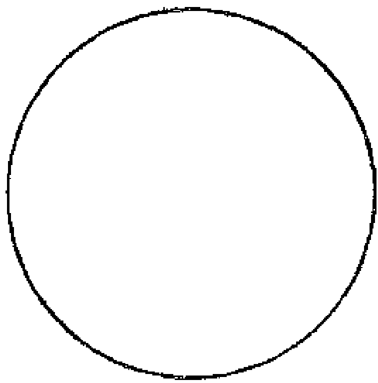

Рис. 9.

личных точек зрения, и для того, чтобы убедиться в этом, необходимо нам или *обойти* предмет с разных сторон, или *переместить самый предмет* относительно нас самих. Элемент движения, стало быть, налицо. Конечно, это не движение в настоящем смысле слова, т.-е. не такое перемещение, которое совершается в определенное время; тут время не при чем, и важно лишь одно изменение положения в пространстве. Впрочем, прилагая в переносном значении понятие о симметрии к музыкальному произведению, мы вводим в него элемент времени, но зато при этом отпадает элемент пространства. Но такое обобщение понятия о симметрии не входит в рамки нашего чисто научного изложения [1]).

---

[1]) Почти год спустя, как была написана эта книга, Г. Конюсом была прочтена в Москве публичная лекция о симметрии музыкальных произведений. Душа музыки, ритм, состоит в правильном периодическом повторении частей музыкального произведения (частей такта в такте, такта в музыкальном предложении, предложения в периоде, и т. д.), правильное же повторение одинаковых частей в целом и составляет сущность симметрии. Мы с тем большим правом можем приложить к музыкальному произведению понятие о симметрии, что это произведение записывается при помощи нот, т.-е. получает пространственный, геометрический образ, части которого мы можем обозревать. Подобно музыкальным произведениям, могут быть симметричными и произведения словесности, в особенности стихотворения. Если понятие о симметрии может быть приложено к музыкальным и словесным произведениям, то конечно, оно имеет гораздо более непосредственное и прямое приложение к произведениям живописи и архитектуры.

III.

Симметрия систем плоских фигур.

Мы сплошь и рядом говорим *о симметрическом расположении предметов*, напр., стульев в комнате, цветочных клумб и дорожек в саду и т. п. Мы можем свести рассмотрение этого вопроса в простейшем случае к рассмотрению симметричного расположения плоских фигур друг относительно друга на одной и той же плоскости. Мы легко заметим, что в этом случае, говоря о симметричном расположении фигур, мы говорим в сущности о сочетании одинаковых фигур в одну общую симметричную фигуру.

Например, несколько правильных треугольников могут быть расположены различным образом в симметричные группы. Два правильных треугольника могут быть сложены в ромб (рис. 10), или в звезду (рис. 11), шесть правильных треугольников могут составить правильный шестиугольник (рис. 12).

Присматриваясь, однакоже, ближе к фигурам, слагающимся в симметрические группы, мы можем различить два существенно различных случая. Например, шестиугольник можно сложить, между прочим, двумя совершенно различными способами. На рисунке 12 показан шестиугольник, сложенный из одинаковых, *совместимо равных* треугольников, совпадающих друг с другом при наложении. На рис. 13 тот же шестиугольник сложен из треугольников, в числе которых есть совместимо равные, напр., *АОБ* и *ВОГ*, но есть и не-

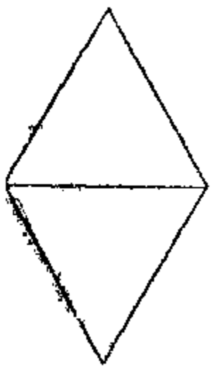

Рис. 10.

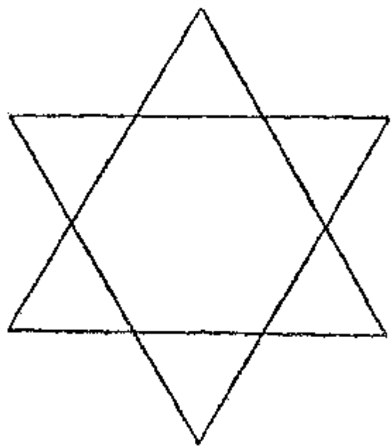

Рис 11.

совместимые треугольники, как *АОБ* и *БОВ*. Однако треугольники *АОБ* и *БОВ* *симметричны* друг другу относительно линии симметрии *ОБ*; они, как говорят, *симметрично равны* друг другу. Таким образом, *симметрическую совокупность предметов можно составить или из совместимо равных, или из симметрично равных предметов, или из тех и других вместе.*

Как пример симметричного расположения симметрично равных фигур, приведем рис. 14 и 15.

На рис. 14 представлены два симметрично равных треугольника *АБВ* и *А'Б'В'*, расположенных симметрично относительно линии симметрии *МН*.

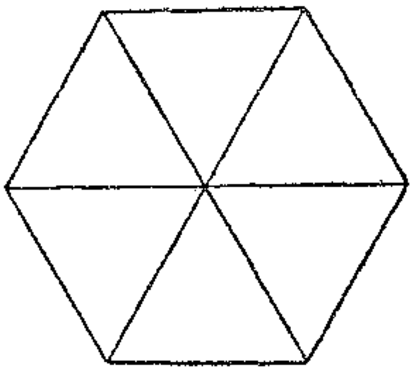

Рис. 12.

На рис. 15 представлено симметричное расположение симметрично равных и совместимо равных треугольников, характеризующееся четырьмя линиями симметрии, центром вращения четвертого порядка и центром симметрии.

В симметричном расположении фигур, однакоже, можно открыть еще один очень характерный элемент симметрии, не встречающийся в самих плоских фигурах. Напишем ряд одинаковых букв *А* (рис. 16), состоящий, положим, из шести букв. Повидимому, это—ряд симметрический, так как каждую букву необходимс переместить одинаково для того чтобы совместить ее с другою буквою ря-

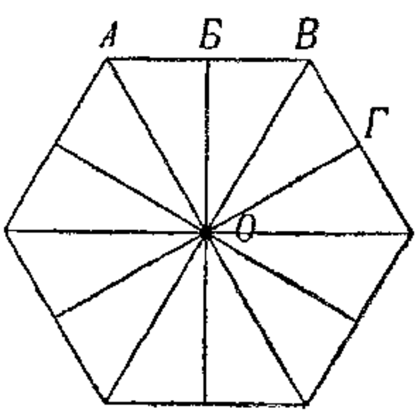

Рис. 13.

да. Но выше было указано, что совокупность фигур следует рассматривать как одну фигуру. Пе-

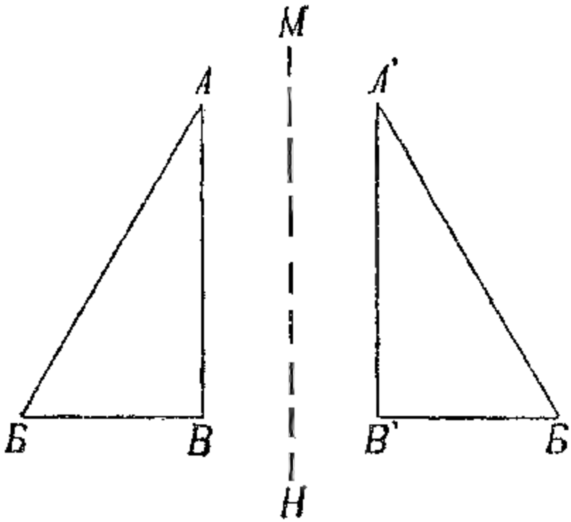

Рис. 14.

реместим весь наш ряд из шести букв *A* вправо на одну букву. Первое *A* совместится со вторым, второе с третьим и т. д. до последнего, которое, однакоже, не совместится ни с чем, ибо за ним *A* нет. Равным образом, при подобном перемещении нашего ряда, с первым *A* ничто не совместится, ибо перед первым *A* нет ничего. Очевидно, наш ряд не вполне симметричен, и, чтобы сде-

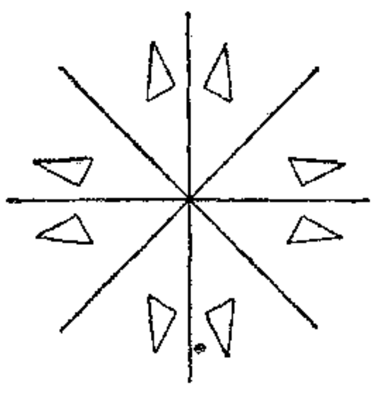

Рис. 15.

лать его вполне симметричным, необходимо его дополнить, поставивши направо и налево по некоторому числу букв *A*. Но очевидно, сколько бы мы ни писали *A* спереди и сзади, всегда будет так, что, при перемещении ряда на одну букву вправо, с первым *A* ничто не совместится, а последнее *A* ни с чем не совместится, и ряд остается неполным. То же будет и в случае перемещения ряда влево на одну букву. *Для того, чтобы быть симметричным, ряд должен быть бесконечно*

A A A A A A

Рис. 16.

длинен, т.-е. не иметь ни начала ни конца. Подобный ряд существует лишь в нашем воображении, мы его представить себе точно, разумеется, не в состоянии, но мы можем всегда предположить, что за тем *A*, которое мы считаем первым или конечным, есть еще сколько угодно *A*, совершенно так же, как мы не можем себе представить последнего числа в ряду чисел и знаем наверное, что, как бы ни было велико данное число, всегда есть сколько угодно еще бóльших чисел.

Итак, попытка составить симметричный прямолинейный ряд фигур помощью самого простого перемещения — прямолинейно-поступательного — приводит к бесконечному ряду таких фигур. Практического значения такой ряд, конечно, не может иметь, но теоретическое значение его во многих вопросах, связанных с симметрией, весьма важно. Как отдаленное приближение к такой симметрии на практике, можно привести в пример длинную цепь.

Плоские фигуры можно разместить на плоскости и не в один ряд. Так как этот ряд должен образоваться из первого перемещением его параллельно самому себе, то понятно, что для полной симметрии рядов должно получиться бесконечное множество. Часть такой неограниченной плоскости, усеянной бесчисленным множеством одинаковых и одинаково расположенных фигур, изображена на

A A A A A A
A A A A A A
A A A A A A
A A A A A A

Рис. 17.

рис. 17. Буквы *A* в этой системе расположены в точках пересечения двух рядов параллельных прямых, образующих так наз. *плоскую параллелограмматическую сетку* (рис. 18). Эти сетки играют громадную роль в математической теории чисел и в теории строения кристаллов.

На практике такая сетка лежит в основании, напр., рисунка ситца, набойки или всякой другой однообразной узорчатой материи, а также стенных обоев, и мы очень хорошо понимаем, что по существу такая материя или обои могут однообразно простираться без границ во все стороны, и только технические условия их производства кладут пределы их протяжению.

Отдельные параллелограммы сетки, как говорят, заполняют без промежутков всю плоскость.

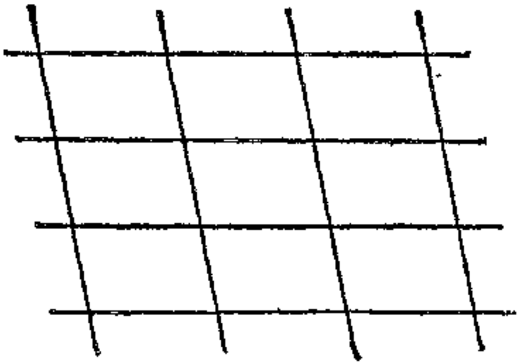

Рис. 18.

В связи с этим обстоятельством возник целый вопрос о правильном заполнении плоскости плоски-

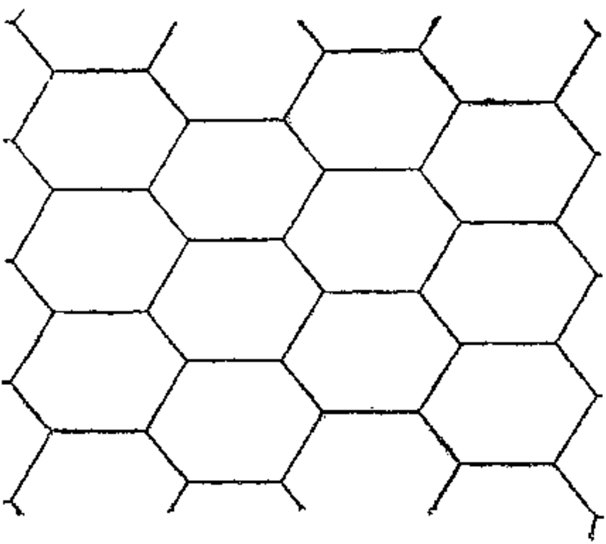

Рис. 19.

ми фигурами совместимо или симметрично равными. Не вдаваясь в подробности, заметим, что в этом вопросе играют решающую роль параллелограмматические сетки и что такие фигуры всегда

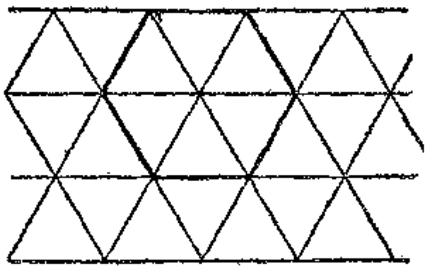

Рис. 20.

можно свести на прямолинейный или криволинейный шестиугольник (рис. 19), его подразделения или сочетания с другими такими же шестиугольниками. Для примера приведем два случая. В одном (рис. 20) плоскость заполнена правильными

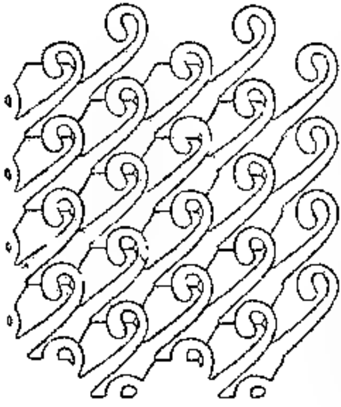

Рис. 21.

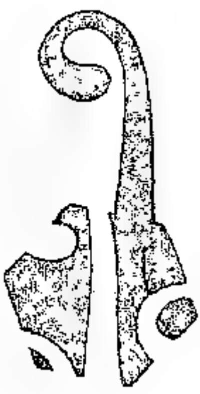

Рис. 22.

треугольниками, представляющими шестую часть правильного шестиугольника. Этот шестиугольник обведен на рисунке более толстым контуром. Второй случай (рис. 21) представляет плоскость, заполненную фигурами (рис. 22), происшедшими из правильного шестиугольника, у которого одна сторона вытянута в загнутый отросток (пример взят у лорда Кельвина).

R Я | R Я | R Я | R | Я

Рис. 23.

Так же, как и остальные элементы симметрии, так и поступательное перемещение может сопровождаться другими элементами симметрии.

Рис. 23 представляет часть бесконечного ряда букв *R* французского и ему симметрично равного русского *Я*, расположенных так, что каждая пара *RЯ* или *ЯR* совмещается поступательно с соседней парой; кроме того, ряд симметричен отно-

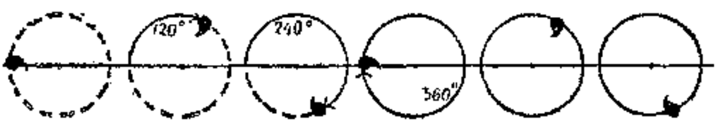

Рис. 24.

сительно равноотстоящих линий симметрии, перпендикулярных к длине ряда и делящих промежутки между двумя соседними буквами пополам.

Наконец, поступательное перемещение может сопровождаться вращением.

Рис. 24 представляет симметричный бесконечный ряд фигур в виде запятых, расположенных по следующему закону. Вообразим круг, связанный с запятой. Центр круга движется поступательно, и в то время, когда он проходит поступательно вправо равные промежутки, круг поверты-

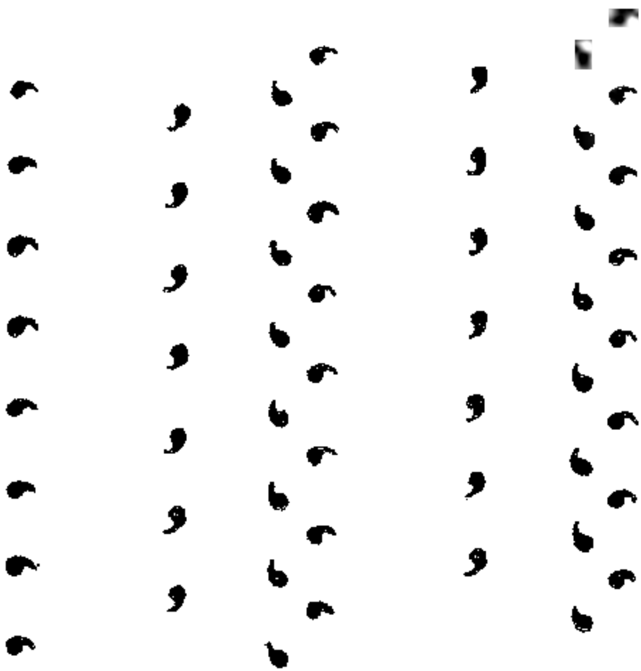

Рис. 25.

вается по стрелке часов на треть полного оборота. Можно вообразить и в этом случае бесконечное множество рядов, равных и параллельных только что рассмотренному и заполняющих собою неограниченную плоскость (рис. 25).

IV.

Важнейшие свойства линий симметрии и центра вращении.

Существуют вполне определенные законы, которым должны подчиняться элементы симметрии. Мы приведем из них только самые важные.

1. *Две линии симметрии, пересекаясь под косым (не прямым) углом, всегда влекут за собою появление других линий симметрии, проходящих через точку пересечения взятых линий.*

Пусть *МН* и *ПР* (рис. 26) будут две линии симметрии, наклоненные друг к другу под углом *a* и пересекающиеся в точке *О*. Так как *ПР* есть линия симметрии, то симметрично с *МН* вправо (считая сверху) от *ПР* должна проходить тоже линия симметрии *КЛ*, вправо от которой должна лежать линия сим-

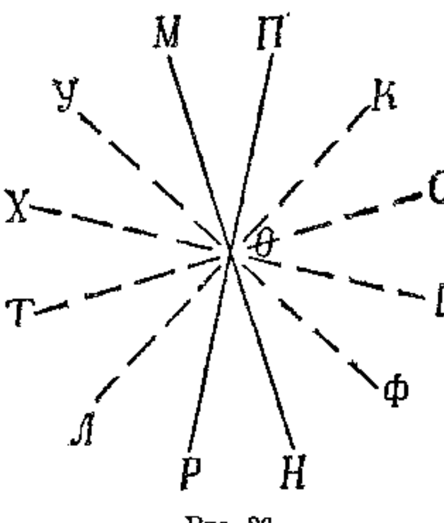

Рис. 26.

метрии *СТ*, симметричная с *ПР*. С другой стороны и влево от *МН* должна проходить линия симметрии *УФ*, симметричная *ПР*, и т. д. Все эти линии должны друг с другом образовать постоянно один и тот же угол *а*. Только в том случае, если линии симметрии образуют угол в 90° (прямой), они не могут дать новых линий симметрии (рис. 27).

2. *Угол между двумя линиями симметрии должен быть целою частью 180° (двух прямых углов, полуоборота).*

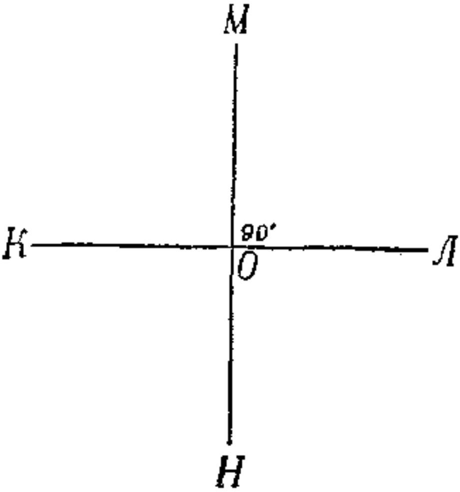

Рис. 27.

Положим, что даны две линии симметрии *МН* и *КЛ* (рис. 28), образующие между собою угол *а*. Их взаимодействие дает еще линии симметрии *ПР*, *СТ* и *ХЦ*, заключающие между собою углы *а*. Но между *ХЦ* и *МН*, если угол *а* не представляет целой части 180°, появится новый угол *б*, меньший, чем *а*, так что для нашего вывода нам придется взять вместо прежних линий симметрии с углом *а* две другие с углом *б*. Получим вновь целый ряд линий симметрии, не представленных на рисунке, проходящих через одну и ту же точку, но составляющих между собою угол *б*. Если и этот угол окажется не целою частью 180°, то мы таким же путем, как и прежде, найдем две линии, составляющие между собою угол *в*, меньший чем *б*, и придем к третьей системе линий с углом *в*. Очевидно, что мы только тогда остановимся, в этом переходе от одной системы линий к другой, когда исходный угол будет равен целой части 180⁰.

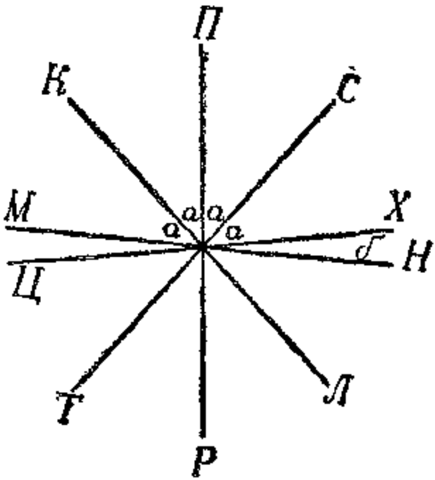

Рис. 28.

Тогда мы возвратимся к линии *МН*, и число наших линий симметрии, выведенных из двух взятых, будет конечное, иначе мы будем повторять наше действие без конца и получим бесчисленное множество линий симметрии.

3. ***Точка пересечения двух линий симметрии есть центр вращения, при чем угол вращения вдвое больше угла между линиями симметрии.***

Пусть OK и OM (рис. 29) [1]) будут две линии симметрии, составляющие друг с другом угол a. Треугольнику 1 будет соответствовать треугольник 2, симметричный и симметрично расположенный с 1-ым относительно линии OK, а с треугольником 2 будет симметричен и симметрично расположен, относительно второй линии симметрии OM, треугольник 3. Но легко видеть, что треуголь-

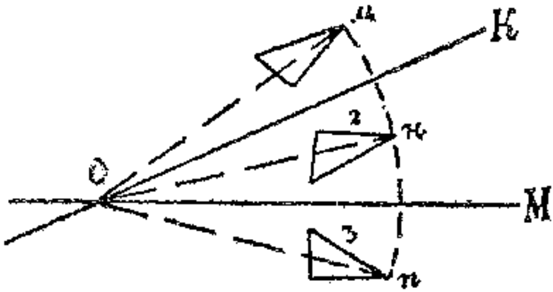

Рис. 29.

ник 3 совместимо равен треугольнику 1 и так расположен относительно треугольника 1, что стоит лишь повернуть около точки O треугольник 1, и он совместится с треугольником 3. Угол поворота будет $мOn$, при чем этот угол слагается из четырех частей $мOK$ и $KOн$, $нOM$ и MOn. По симметрии, углы $мOK$ и $KOн$ равны между собою, равно как и углы $нOM$ и MOn. Поэтому в угле $мOn$ угол KOM сосчитан дважды, и таким образом угол поворота оказывается равным двойному углу между линиями симметрии. Этот закон можно

[1]) На рисунке 29 пропущена буква O, обозначающая точку пересечения линий симметрии.

выразить еще и иначе: *линии симметрии пересекаются в центре вращения, порядок которого равен числу пересекающихся в нем линий*. Если, напр., число пересекающихся линий симметрии равно шести, то угол между ними равен $180^0:6=30^0$. Угол совмещения, по вышедоказанному, равен $30^0 \times 2=60^0$ и заключается в полном обороте $360^0: 60=6$ раз.

4. *Точка пересечения четного числа пересекающихся линий симметрии представляет всегда центр симметрии*. Как мы видели выше (стр. 11), центр симметрии равнозначителен углу совмещения в пол-оборота. В свою очередь, угол в пол-оборота всегда найдем среди углов совмещения при центре симметрии четного порядка. Но такой центр симметрии может получиться лишь при пересечении четного числа линий симметрии.

V.

Симметрия параллелограмматических сеток.

Как увидим дальше, свойства параллелограмматических сеток тожественны с некоторыми свойствами растений и кристаллов. Поэтому, пока мы еще не покинули область плоских фигур, будет уместно познакомиться с некоторыми особенностями симметрии этих сеток.

Всякая параллелограмматическая сетка,—мы будем звать ее для краткости просто сеткой, — есть по существу фигура симметрическая, так как она совмещается сама с собою при прямолинейно-поступательном перемещении.

Кроме того, все вершины параллелограммов сетки, —мы будем их звать *узлами сетки*, —все центры и все средины сторон параллелограммов будут непременно центрами вращения второго порядка или центрами симметрии сетки. Но симметричными сетками по преимуществу называются сетки, обладающие линиями симметрии и центрами вращения выше второго порядка. Таких симметричных сеток, как увидим ниже, очень немного, и мы проще всего отыщем все их виды, решив вопрос какую величину вообще может иметь угол совмещения в симметричной сетке. Этот вопрос решается следующими элементарными и наглядными соображениями.

Пусть O и A (рис. 30) будут два смежных центра вращения сетки. Если мы проведем через O и A неограниченную прямую, то на ней однообразно и на расстоянии OA друг от друга найдем целый бесконечный ряд таких же центров. Повернем нашу сетку около центра O на угол совмещения a.

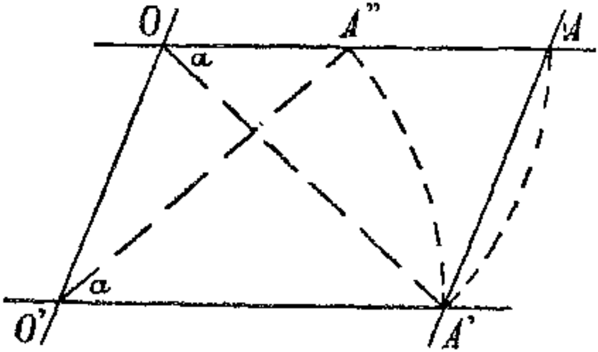

Рис. 30.

Центр A перейдет в A', где найдем новый такой же центр вращения сетки. По обе стороны этого центра, на неограниченной прямой, параллельной OA и проходящей через A', мы, на расстоянии OA друг от друга, найдем опять бесконечное число таких же центров, из которых пусть O' будет первый от A', расположенный по отношению к A' так же, как O по отношению к A. Повернем нашу сетку обратно около O' на угол a. При этом точка A' возвратится на ряд OA и должна будет совпасть с которым-нибудь из центров вращения, находящихся на этом ряду. Таким образом, точка A'' может прийтись или в точку O, или в точку на продолжении прямой OA влево от O, на расстоянии от O, равном или OA, или $2OA$, или $3OA$, т. е

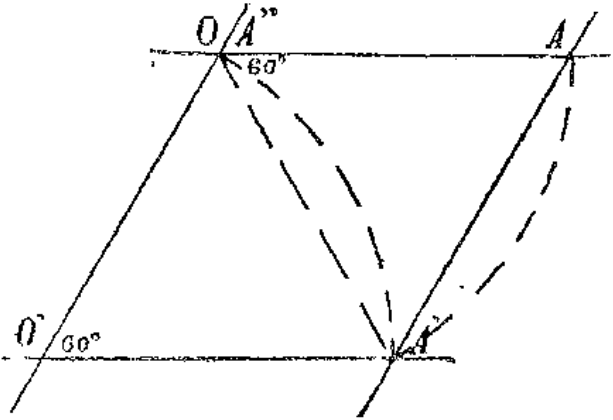

Рис 31.

целому числу промежутков OA. Если точка A совместится с O, то это даст угол вращения в 60^0 (рис. 31); если она придет в точку A'', первую влево от O (рис. 32), то угол будет равен 90^0; если — во вторую точку налево от O (рис. 33), то угол

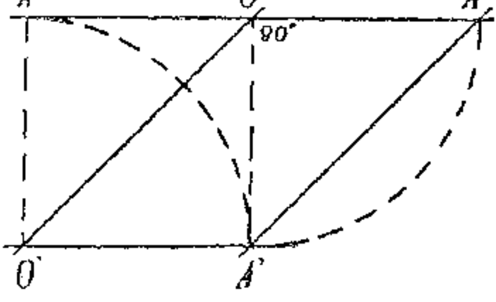

Рис. 32.

будет равен 120°, если же, наконец, в третью налево от O (рис. 34), то угол будет равен 180°. Больше, очевидно, случаев не может быть. Поэтому *в плоских сетках могут встречаться центры*

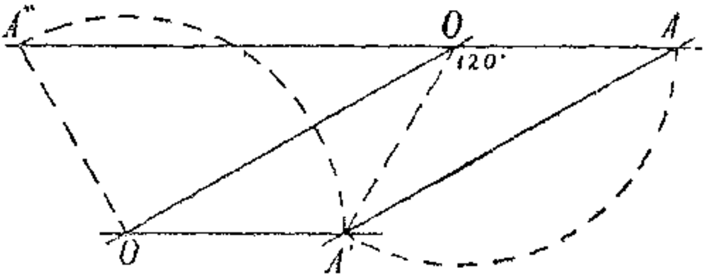

Рис. 33

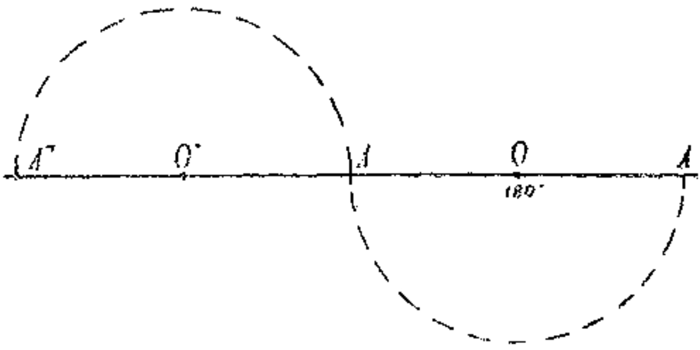

Рис. 34

вращения только второго, третьего, четвертого и шестого порядков.

Это в высшей степени важный результат, показывающий, что число случаев симметрии сеток весьма ограничено. Ниже, когда зайдет речь о природе кристаллов, мы оценим по достоинству всю важность этого вывода.

Рисунки 35—38 представляют виды симметричных сеток.

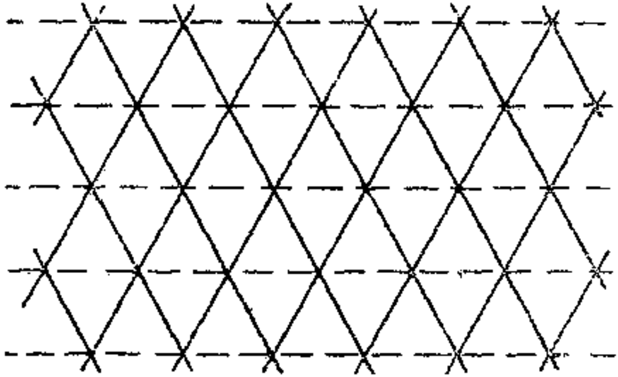

Рис. 35

На рис. 35 изображена сетка, ряды которой пересекаются под 60°. При этом за ряды можно принять или обе системы сплошных линий чертежа, или одну из сплошных и прерывчатую. Сетка, в сущности, образована правильными треугольниками. В центре каждого из этих треугольников (сетку, разумеется, надо вообразить безграничной) помещается центр вращения третьего порядка, в каждой вершине—шестого порядка и посредине каждой стороны — второго. Через каждую вершину проходят шесть линий симметрии, образующих друг с другом

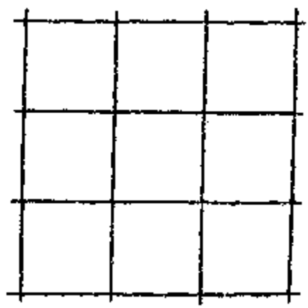

Рис. 36

углы в 30°. Эти линии пересекаются между собою по две—в центрах второго порядка, по три—в центрах третьего порядка и по шесть—в центрах шестого порядка. Петли такой сетки имеют форму ромба с углом в 60°.

Рис. 36 представляет сетку с квадратными петлями. В центре и в четырех вершинах каждого

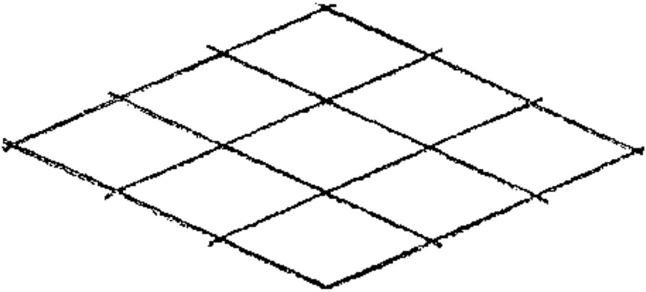

Рис. 37

квадрата помещаются центры вращения четвертого порядка, посредине сторон—второго порядка. Каждый ряд такой сетки представляет линию симметрии. Кроме того, линии симметрии проходят

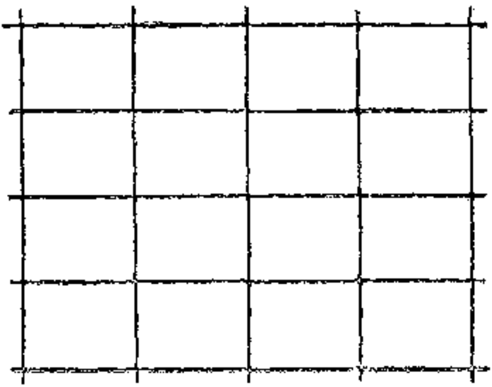

Рис. 38.

через центры квадратов параллельно рядам и по диагоналям квадратов. Таким образом, в центре и в каждой вершине каждого квадрата пересекаются четыре линии симметрии, а в средине сторон две.

Рис. 37 и 38 представляют сетки только с центрами вращения второго порядка. Эти центры помещаются в обеих сетках в центрах петель, в их вершинах и в срединах сторон. Сетка рис. 37 имеет петли ромбической формы, и линии ее симметрии проходят по диагоналям ромбов; сетка рис. 38 обладает прямоугольными петлями, и линии ее симметрии проходят. 1) вдоль рядов сетки и 2) параллельно рядам сетки через центры петель.

VI.

Симметрия пространственных фигур.

Переход от симметрии плоских фигур к симметрии фигур трех измерений представляется очень простым, но в то же время мы тут встречаемся с новыми, в высшей степени интересными и важными случаями симметрии.

Место линии симметрии в пространственных фигурах заступает *плоскость симметрии.* Такая плоскость симметрии разделяет наше тело вертикально на две части, — правую и левую, проходя через его средину спереди назад. Закон расположения правой и левой части относительно плоскости симметрии тот же, что и для линии симметрии: мы очень хорошо знаем, что от правого плеча до плоскости симметрии нашего тела такое же точно расстояние, как и от левого плеча, и что прямая линия, соединяющая оба наши плеча, перпендикулярна к плоскости симметрии. Это касается не только расположения плеч, но и всяких двух одинаковых точек нашего тела. Мы отлично знаем, что именно благодаря этому роду симметрии у нас, напр., руки и ноги не совместимо, а симметрично равны: мы не можем надеть перчатку с правой руки на левую руку и башмак с правой ноги на левую и наоборот.

Материализацией, если можно так выразиться, плоскости симметрии является зеркало и его первообраз—поверхность спокойной воды. Предмет и его изображение в зеркале становятся как бы правой и левой половинами одного и того же предмета, симметрия которого похожа на симметрию нашего тела. Если бы мы могли материализовать изображения в зеркале, то мы могли бы, напр., надеть на правую руку изображение левой перчатки в зеркале. Мы привыкли к тому, что зеркало превращает нашу правую половину в левую половину нашего изображения и наоборот, так что мы совершенно свободно пользуемся зеркалом для того, чтобы привести в порядок наше платье, завязать и застегнуть невидимые нами непосредственно на нас его части; но если бы мы вздумали проделать со своим изображением в зеркале нечто необычное, напр., попробовали подать ему руку, как бы для рукопожатия, то увидели бы, что наше изображение протягивает нам не ту руку, какую протянул бы на его месте человек, и это нам сейчас бы бросилось в глаза. Если кому-либо случалось стоять между двумя зеркалами и наблюдать изображение не непосредственное, а изображение этого непосредственного изображения, то, вероятно, он замечал, как неловко пользоваться этим изображением. Это потому, что такое изображение совместимо равно нашему телу, его правая сторона соответствует нашей правой, и левая—левой, а так как это изображение мы видим также в зеркале, с которым вообще привыкли обращаться, то оно и кажется нам необычным, странным и неудобным. Все эти примеры я привожу для того, чтобы показать, насколько мы привыкли к зеркальной симметрии, к симметрии, характеризующейся присутствием плоскости симметрии. Мало того, мы сплошь и рядом под самой симметрией понимаем одинаковое расположение предметов или частей одного и того же предмета справа и слева некоторой воображаемой плоскости, и можно без натяжки утверждать, что плоскость симметрии представляет единственный элемент симметрии, воспринимаемый нами непосредственно, без всякого ближайшего рассмотрения.

Линия симметрии представляет лишь частный случай плоскости симметрии. Если фигуру, симметричную относительно плоскости симметрии, пересечь плоскостью перпендикулярно плоскости симметрии, то получим в сечении плоскую фигуру, симметричную относительно линии симметрии, при чем сама линия симметрии представится сечением плоскости симметрии.

Совершенно так же, как линия симметрии соответствует плоскости симметрии, так и центру вращения плоской фигуры соответствует *ось симметрии* пространственной фигуры. Как и центр симметрии, так и ось симметрии бывает различного порядка, смотря по тому, сколько раз в течение полного оборота на оси фигура приходит в положение, ничем по виду не отличающееся от первоначального, или, как говорят, сколько раз в течение полного оборота на оси фигура совмещается сама с собою. Таким образом, оси симметрии бывают второго, третьего, четвертого и т. д. порядка. Иногда оси в соответствии со своим порядком зовутся двойными, тройными, четверными и т. д.

Приведем несколько примеров фигур, симметричных относительно оси симметрии различного по-

Рис. 39.

рядка. При этом постараемся выбрать настолько простые фигуры, чтобы каждый легко мог сам их сделать.

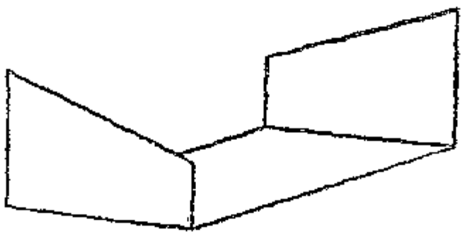

Рис. 40.

Вырежем из картона параллелограмм (рис. 39) и загнем его концы в одну сторону под прямым углом[1]), —мы получим пространственную фигуру с осью второго порядка, перпендикулярною к срединному прямоугольнику фигуры в его центре (рис. 40).

---

[1]) Прямой угол выбран мною для избежания недоразумений

Для того, чтобы получить фигуру с осью третьего порядка, вырежем правильный треугольник (рис. 41), впишем в него косо другой правильный же треугольник и загнем под прямым углом краевые треугольники в одну сторону.

Фигура с четверной осью симметрии получится точно таким же образом из квадрата, в который впишем косо другой квадрат (рис. 42).

Третий элемент симметрии, *центр симметрии*, встречается одинаково как в плоских, так и в

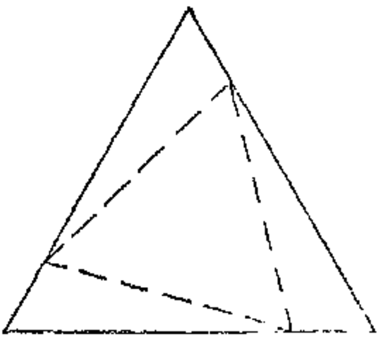

Рис. 41

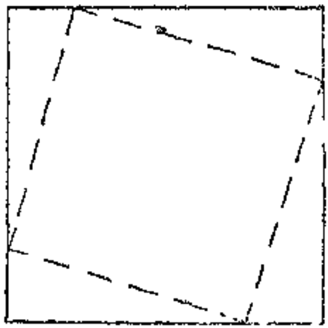

Рис. 42

пространственных фигурах, но в последних он уже совершенно отличается от центра вращения. Фигуру с центром симметрии получим из нашего бумажного параллелограмма, загибая его концы в разные стороны (рис. 43). Такая фигура не обладает вращениями, которые приводили бы ее в совмещение самое с собою; в ней есть лишь такая точка, которая делит пополам все прямые, соединяющие одинаковые точки фигуры попарно. Эта точка и есть центр симметрии.

В пространственной фигуре может присутствовать больше одной плоскости или оси симметрии, но, разумеется, никогда не бывает больше одного центра симметрии. При этом все плоскости и оси симметрии пересекаются в одной точке — центре

Рис. 43

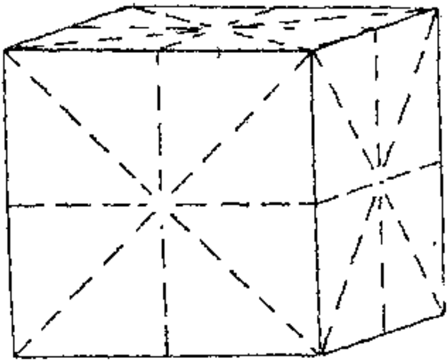

Рис. 44.

фигуры, который, однакоже, может и не быть центром симметрии. Примером фигуры с несколькими плоскостями симметрии может служить куб (рис. 44), в котором можно провести девять плоскостей симметрии. Примером фигуры с тремя осями симстить мысли, что симметрия этих двух фигур одинакова: в одной два одинаковых конца и срединная часть прямоугольник, в другой же—четыре одинаковых конца и срединная часть квадрат. Очевидно, что последняя фигура по симметрии сложнее первой, и в ней должен быть еще какой-нибудь новый элемент симметрии. Попробуем повернуть нашу фигуру на четверть оборота так, как если бы ось симметрии была не второго, а четвертого порядка, и сравним фигуру в ее новом положении с прежним положением. Повернутая на четверть оборота фигура придет в положение, обозначенное на рис. 46 прерывчатой линией. Сравнивая прежнее положение фигуры с новым, легко заметить, что в новом положении части фигуры представляются зеркальным отражением частей ее в прежнем положении, при чем зеркальною плоскостью является срединная квадратная часть фигуры. Таким образом, можно сказать, что для совмещения одной части фигуры с соседней частью надо первую часть повернуть на оси симметрии на четверть оборота и затем отразить эту часть в плоскости симметрии, перпендикулярной к оси и совпадающей с плоскостью срединного квадрата. Ни поворот в четверть оборота, ни отражение в плоскости симметрии, порознь взятые, не имеют значения: в фигуре нет ни оси четвертого порядка, ни плоскости симметрии, как таковых, действующих самостоятельно, есть только их совокупное действие,—отражение, сопровождаемое вращением. Ни плоскость симметрии, ни четверная ось здесь *не реальны*, порознь взятые, реальна лишь их совокупность, реален лишь результат их совместного действия Этот случай Е. С

Федоров предложил назвать *сложною симметрией*, при чем он выражается так, что в фигуре присутствует, положим, ось сложной симметрии четвертого порядка. Кюри, наоборот, отдает преимущество плоскости симметрии и называет этот случай симметрии симметрией с перемежающеюся плоскостью. На деле же ни то, ни другое выражение не соответствует сути, так как ни ось, ни плоскость не имеют здесь преимущественного значения. Нетрудно понять, почему четверная ось сложной симметрии есть в то же время и ось второго порядка простой симметрии. При втором повороте фигуры на четверть оборота происходит второе отражение в плоскости квадрата, дающее изображение, совместимо равное первоначально взятой части фигуры, так что всю фигуру можно совместить самое с собою поворотом в пол-оборота. Итак, теперь мы видим, что симметрия нашего квадрата с загнутыми попеременно в разные стороны углами, действительно сложнее симметрии параллелограмма с загнутыми в одну сторону углами, но необходимо было время в целое полстолетие и совместная работа нескольких выдающихся ученых, чтобы окончательно установить существование симметрии этого рода [1]).

---

[1]) Идея пояснить свойства симметрии пространственных фигур помощью образования этих фигур из плоских загибанием углов принадлежит автору этой книги.

VII.

Симметрия систем пространственных фигур.

Говоря о симметрическом расположении пространственных фигур, мы так же, как и в случае плоских фигур (см. главу III), имеем в виду симметрию той сложной фигуры, которая образуется из совокупности отдельных пространственных фигур, при чем, конечно, не обязательно, чтобы эти фигуры соприкасались друг с другом. Такое расположение пространственных фигур может характеризоваться присутствием: 1) одной или нескольких плоскостей симметрии, 2) одной или нескольких осей симметрии, 3) центра симметрии или, наконец, 4) одновременным присутствием различных элементов симметрии. Входить в подробности тут не стоит. Мы остановимся только на симметрии систем бесконечного числа фигур. Для пространственных фигур, как и для плоских, мы найдем в этом случае характерный элемент симметрии—прямолинейно-поступательное перемещение. Мы видели, что на плоскости простейший случай такой поступательной симметрии представляла плоская параллелограмматическая сетка. Она совмещалась сама с собою при поступательном перемещении на длину стороны своего параллелограмма. Таких главных перемещений в сетке два, соответственио двум различным сторонам параллелограмма, сходящимся в одной вершине. Из такой сетки мы можем составить пространственную фигуру, перемещая сетку сколько угодно раз вместе с ее плоскостью параллельно ей самой, по направлению, не лежащему в плоскости сетки, и притом каждый раз на одну и ту же, впрочем, совершенно произвольную величину. Мы получим так называемую *пространственную параллелепипедальную решетку*, или просто решетку (рис. 47), которую можно вообразить, как совокупность бесчисленного множества совершенно одинаковых параллелепипедов, приложенных один к другому без промежутков так, чтобы стороны их сливались по две. Вершины параллелепипедов будут *узлами* решетки.

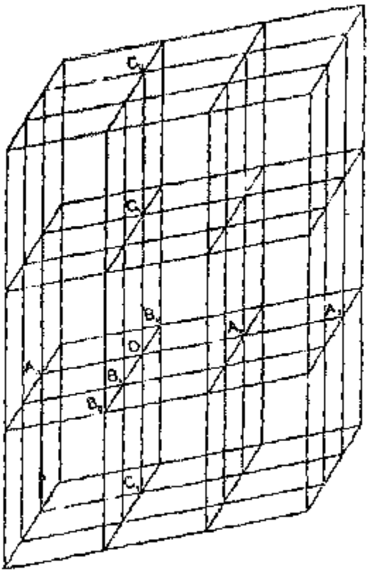

Рис. 4.

По своему происхождению решетка представляет симметричную пространственную фигуру. Кроме поступательных совмещений, она обладает центрами симметрии, помещающимися в узлах решетки, в центрах граней параллелепипедов, в центрах самих параллелепипедов и в срединах их ребер. Но как плоская сетка, так и пространственная решетка считается по преимуществу симметричной, если в ней находятся плоскости и оси симметрии. Нетрудно убедиться, что порядок осей симметрии решетки должен стоять в согласии с порядком центров вращения сеток, из которых решетка образована, а потому оси симметрии решетки могут быть только второго, третьего, четвертого и шестого порядка. Мы не будем останавливаться подробнее на этом вопросе.

В высшей степени важно сочетание поступательного движения с осью симметрии, совпадающей с направлением этого движения. Это — так называемая *винтовая ось симметрии*. Она тоже может существовать только в бесконечных системах фигур, располагающихся при этом на равных промежутках по винтовой линии. Винтовую линию мы легко произведем таким образом. Возьмем круглый цилиндр *Ц* (рис. 48) и навернем на него прямоугольный треугольник *абв* таких размеров, чтобы катет *ав* был равен окружности основания цилиндра, а катет *аб* — высоте цилиндра [1]). Тогда гипотенуза *бв* ляжет на поверхности цилиндра по винтовой линии. Мы получим при этом лишь один виток винта. Следующие витки получатся совершенно таким же образом на продолжении цилиндра вверх и вниз, при чем по существу такое продолжение не должно иметь конца ни в ту, ни в другую сторону. Расстояние *аб* называется

1) Навертывать следует так, чтобы точки *а* и *в* совпали

винтовым ходом. Если представить себе, что с осью цилиндра совпадает винтовая ось симметрии, положим, четвертого порядка, то рис. 49 изобразит нам расположение одинаковых точек в зависимости от винтовой симметрии. В течение поступательного перемещения на высоту хода точка *м*

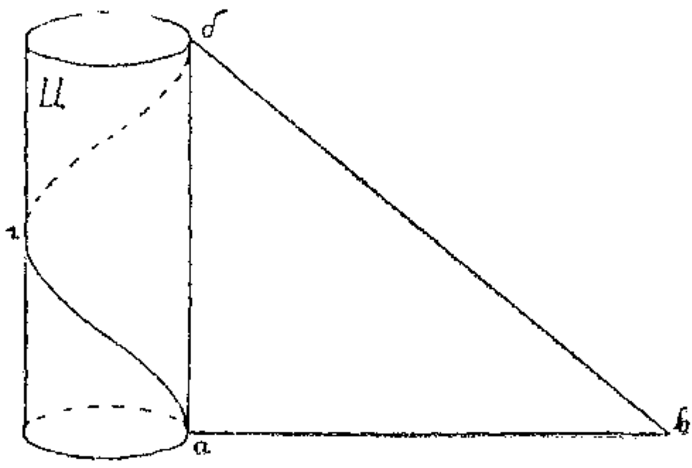

Рис. 48

повернется на оси симметрии четыре раза и поместится в положение *н*, *п*, *р* и *с*, при чем в последнем положении она придет на прежнюю образующую цилиндра, завершив тем самым период винтового перемещения. Выше повторится то же самое, и вся поверхность бесконечного цилиндра окажется однообразно усеянной точками, подобными *м*.

Подобно тому, как есть многоугольники, без промежутков заполняющие плоскость, так есть и многогранники, без промежутков заполняющие пространство. Не входя в подробности этого в высшей степени интересного вопроса, заметим,

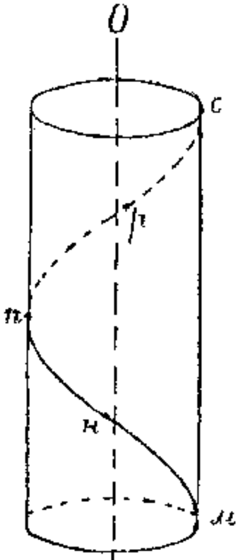

Рис. 49

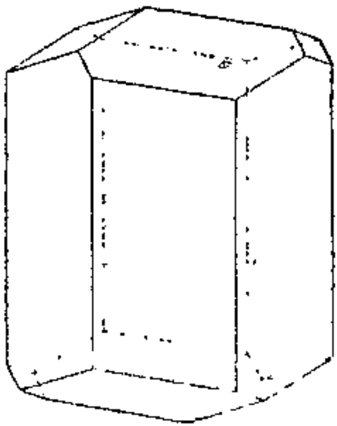

Рис. 50.

что такими многогранниками могут быть только параллелепипеды, шестигранная призма, два особых двенадцатигранника и особый четырнадцатигранник. Такие многогранники Е. С. Федоров предложил называть параллелоэдрами. Один из таких многогранников изображен на рис. 50.

VIII.

Важнейшие свойства плоскостей, осей и центра симметрии.

В главе IV были выведены некоторые из важных свойств линий симметрии и центра вращения. Эти свойства могут быть без дальнейших околичностей распространены на элементы симметрии пространственных фигур. Мы поэтому не будем останавливаться на доказательствах, когда эти доказательства только в частностях разнятся от приведенных в IV главе.

1. *Две плоскости симметрии, пересекаясь под косым углом, всегда влекут за собою появление других плоскостей симметрии, проходящих через прямую, по которой пересекаются исходные плоскости симметрии.* На основании этого свойства плоскостей симметрии, – увеличиваться в числе путем взаимного зеркального отражения,—устроена общеизвестная старинная игрушка калейдоскоп, продающаяся в Москве на вербах. Как известно, он состоит из трех зеркальных пластинок, сложенных в треугольную призму отражающими поверхностями внутрь. На дно этой призмы между двумя стеклянными пластинками насыпаны кусочки

разноцветного стекла. Как бы неправильно ни уложились при встряхивании эти цветные стеклышки, глаз увидит симметрическую фигуру, образованную многократным изображением кучки этих стеклышек в каждой зеркальной пластинке в отдельности и во всех вместе взятых. Мы поэтому будем называть такое повторение зеркальных плоскостей друг другом калейдоскопическим их повторением. Только две и три взаимно перпендикулярные плоскости не повторяются калейдоскопически и не дают большего числа плоскостей.

2. *Угол между двумя плоскостями симметрии может быть только целою частью* 180^0 (двух прямых).

3. *Прямая пересечения двух или нескольких плоскостей симметрии есть ось симметрии с углом совмещения, вдвое большим угла между двумя соседними плоскостями симметрии. Порядок такой оси симметрии равен числу пересекающихся плоскостей симметрии.*

4. *Сочетание оси симметрии четного порядка с плоскостью симметрии, к ней перпендикулярной, дает центр симметрии.*

Положим, что OO' (рис. 51) будет четная ось симметрии, и Π к ней перпендикулярная плоскость симметрии. Так как число поворотов совмещения на оси OO четное, то точка $м$ может сделать полуоборот около оси OO' и прийти в точку $н$. Точка $н$ будет изображением точки $н$ в плоскости Π. Нетрудно убедиться что, если соединить $м$ с $н$ прямой $мн$, то эта прямая пройдет через точку $ц$, точку встречи оси с плоскостью, и разделится в этой точке пополам.

Если ось OO будет осью второго порядка сложной симметрии, то результат действия такой оси и плоскости $П$ будет тот, что на ряду с точкой $м$ будет существовать только точка n. Ни точки $н$, ни точки p — прямого отражения точки $м$ в плоскости π, не будет. Мы получим лишь центр симметрии. Таким образом, с точки зрения сложной симметрии центр симметрии не есть самостоятельный элемент симметрии, а является в результате совместного действия нереальной оси второго порядка и нереальной плоскости симметрии, к ней перпендикулярной. Более того, самую обыкновенную плоскость симметрии с точки зрения сложной симметрии надо рассматривать, как результат целого оборота на нереальной оси первого порядка (с углом совмещения в 360°) и отражением в нереальной плоскости. В данном случае плоскость

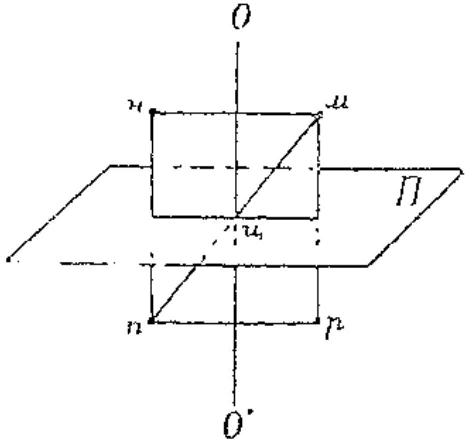

Рис. 51.

симметрии является как частный случай сложной симметрии. Таким образом, учение о сложной симметрии признает, собственно говоря, только два элемента симметрии, реальную ось симметрии и сложную симметрию, частными случаями которой будут плоскость и центр симметрии.

5. *Сочетание трех взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии всегда сопровождается центром симметрии.*

Сочетание двух взаимно-перпендикулярных плоскостей симметрии равнозначительно оси второго порядка, совпадающей с прямой пересечения этих плоскостей. Поэтому сочетание из трех взаимно-перпендикулярных плоскостей симметрии можно заменить одной осью второго порядка и ей перпендикулярною плоскостью, что приводит нас к случаю, уже разобранному в № 4.

IX.

Симметрия, как результат одного лишь отражения.

Из предшествовавшего изложения с достаточною ясностью обнаружилась природа симметрии. Симметрия состоит прежде всего в однообразии частей фигур и в однообразном расположении этих частей в самой фигуре. Это однообразие мы обнаруживаем, перемещая в пространстве часть симметричной фигуры и замечая, что при одинаковых перемещениях эта часть периодически совпадает с другими такими же частями фигуры. Такими перемещениями могут быть или прямолинейное поступательное перемещение на равные промежутки, или вращение около оси на равные углы, или перемещение по другую сторону некоторой точки или плоскости на расстояние, равное первоначальному расстоянию от точки или плоскости. При этом могут быть случаи, когда одного вращения на оси недостаточно, равно как недостаточно и одного отражения в плоскости симметрии, а необходимо совокупное и нераздельное сочетание вращения с отражением, это — случай сложной симметрии. Получается, как видим, большое разнообразие, и мы не можем быть уверены, что все понятие о симметрии, действительно, нами исчерпано. Ум ищет прежде всего простоты и однообразия. Только эти два признака действуют на него успокоительно и вызывают чувство удовлетворения в наших поисках за истиной, и если мы не нашли еще самой простой формы, в которую мы могли бы облечь истину, то это значит, что мы еще не постигли самой истины. С другой стороны, если истина имеет для себя несколько выражений, то мы только тогда почувствуем удовлетворение, когда установим внутреннюю связь этих выражений, сведя их к одному, более простому. В силу этих соображений мне всегда казалось, что в определении симметрии кроется какая-то недоговоренность, нарушающая впечатление единства в этом простом понятии, столь легко нами воспринимаемом чисто интуитивно. Поясню это таким примером. Из понятия об оси симметрии никак нельзя составить себе понятие о плоскости или о центре симметрии. Точно так же из понятия о центре симметрии никоим образом нельзя подойти к понятию об оси и о плоскости симметрии. Но стоит только принять за исходный элемент плоскость симметрии, как мы сейчас же придем и к оси и к центру симметрии. Пересечение двух плоскостей симметрии дает всегда ось симметрии, а пересечение трех взаимно перпендикулярных плоскостей дает центр симметрии (см. главу VIII). Значит, плоскость симметрии есть, несомненно, первоначальный элемент, от которого можно уже подойти к другим. Исходя из этих соображений я решил построить учение о симметрии исключительно на одном понятии о плоскости симметрии Оказалось, что в этой идее я совершенно независимо сошелся с итальянским ученым Виоля, но пути, которых мы держались в осуществлении нашей идеи, оказались разными: Виоля выбрал весьма мало известное не только в широкой публике, но даже и среди специалистов исчисление кватернионов, я же пошел путем элементарной геометрии. Наши работы были опубликованы почти одновременно, весною 1896 года. В этой главе я постараюсь изложить в общих и главных чертах свою точку зрения, оговорившись, что если дальнейшее чтение этой главы читателю представится трудным, то он может совершенно свободно ее пропустить, так как в предыдущих главах он нашел уже достаточно полную картину существенных свойств симметрии.

Мы видели, что прямая, по которой пересекаются две плоскости симметрии, есть ось вращения. Рис. 52 представляет результат действия трех пересекающихся по оси третьего порядка плоскостей симметрии. На рисунке эти плоскости изображены в виде линии симметрии, а ось — в виде центра вращения. Мы ви-

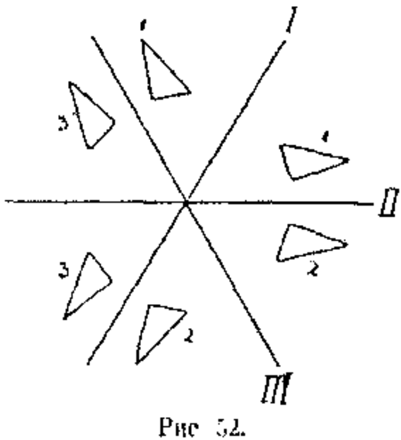

Рис 52.

дим, что треугольник 1, отражаясь во всех плоскостях симметрии, дает начало пяти своим изображениям, из которых 2 и 3 с ним совместимы, а 1', 2' и 3' ему симметрично равны и совместимо равны друг другу Мы видим, что в нашей системе фигур равным образом присутствуют и три плоскости симметрии, и ось симметрии третьего порядка, как результат присутствия плоскостей, и нельзя отделить оси от плоскостей. Если мы разделим обе серии фигур, оставя вместе лишь совместимо равные фигуры то получим две, системы, в которых будет лишь по оси симметрии третьего порядка, плоскостей же не будет (рис. 53 и 54). Сравним рис. 53 и рис. 52. Мы видим, что из треугольника 1 прямо получается треугольник 2,

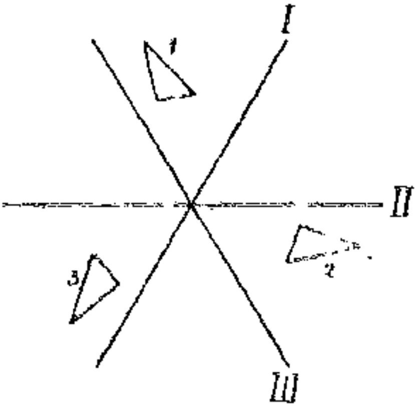

Рис 53.

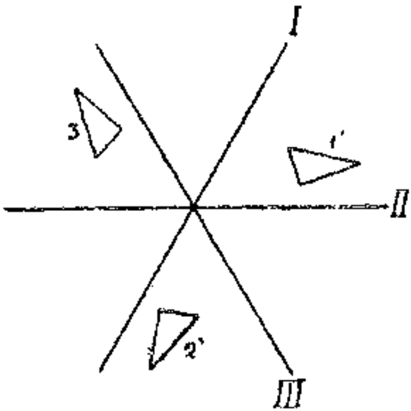

Рис 54.

т.-е пропускается треугольник 1', представляющий зеркальное изображение как треугольника 1 в плоскости I, так и треугольника 2 в плоскости II. Таким образом, плоскости I и II не представляют на рис. 53 из себя *реальных* плоскостей симметрии и дают только реальный результат совместного своего действия: из треугольника 1 совместным и нераздельным действием двух плоскостей I и II получается прямо треугольник 2. Из треугольника 2 совместным и нераздельным действием плоскостей III и I получим треугольник 3, представляющий из себя треугольник 1, повернутый на две трети оборота около оси симметрии. Наконец, треугольник 1 получим из треугольника 3 совместным и нераздельным действием плоскостей II и III. Все сказанное о рисунке 53 касается и рис. 54. Таким образом, введя понятие о плоскостях симметрии нереальных, действующих по две вместе и дающих лишь окончательный результат совместного действия, мы превратим систему плоскостей, пересекающихся по прямой, в ось симметрии. Мы назовем такие плоскости симметрии, действующие по две, *плоскостями двойной симметрии, или двойного отражения*. В соответствии с этим названием мы будем называть реальные плоскости симметрии *плоскостями простой симметрии*, или *простого отражения*. Еще условимся называть способ получения симметричных фигур из одной исходной фигуры *симметричным преобразованием* фигуры. Мы будем в таком случае говорить о простом симметричном преобразовании, когда все плоскости симметрии действуют самостоятельно, и о двойном симметричном преобразовании, когда плоскости действуют по две, теряя самостоятельность.

При сравнении рис. 52 и рис. 53 мы тотчас же заметим интересное обстоятельство: *двойное симметричное преобразование ведет к половине числа изображений* (включая в изображения и исходную фигуру) *по сравнению с простым преобразованием*. Это обстоятельство играет весьма важную роль в учении о кристаллах. Мы поэтому назовем сим-

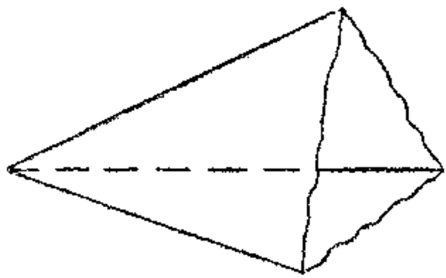

Рис. 55.

метрию с одними лишь реальными плоскостями *полной симметрией* или, употребляя греческий термин, *голосимметрией* [1]), а симметрию с одними лишь осями симметрии — *полусимметрией*, *гемисимметрией*, по-гречески.

Рассмотрим теперь сочетание трех плоскостей симметрии, пересекающихся не по одной общей линии, а в одной точке, т.-е. так называемый трехгранный угол, составленный из плоскостей симметрии (рис. 55). Для более удобного рассмо-

---

[1]) Греческие названия употребляются мною в соответствии с греческими же названиями голоэдрии, гемиэдрии и тетартоэдрии, принятыми в кристаллографии.

трения такого трехгранного угла мы поместим вершину этого трехгранного угла в центр шара и начертим на шаре линии, по которым плоскости трехгранного угла пересекутся с поверхностью шара. Мы получим фигуру, составленную из трех дуг *АБ*, *БВ* и *АБ* (рис. 56), так называемый сферический треугольник. Начертим на поверхности

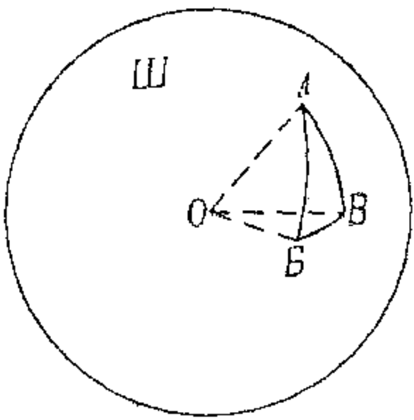

Рис. 56

шара какую-нибудь несимметрическую фигуру, напр., стрелку с загнутым под прямым углом концом (рис. 57). Отражаясь в плоскостях симметрии, стрелка даст свои изображения, из которых рассмотрим только 2-е в плоскости I, 3-е в плоскости II и 4-е в плоскости III. Изображение 2 есть простое зеркальное изображение стрелки 1, изображение 3 может быть получено вращением стрелки 1 около оси, по которой пересекаются плоскости I и II, а изображение 4 есть зеркальное изображение стрелки 3, т.-е. стрелки 1, повернутой на оси. Таким образом, стрелка 4 получается из стрелки 1 путем сложной симметрии совместным действием отражения и вращения. Мы получим одну лишь эту симметрию, если оба промежуточные изображения 2 и 3 пропустим и оставим лишь 1 и 4 (рис. 58). Для достижения такого одного лишь конечного результата сово-

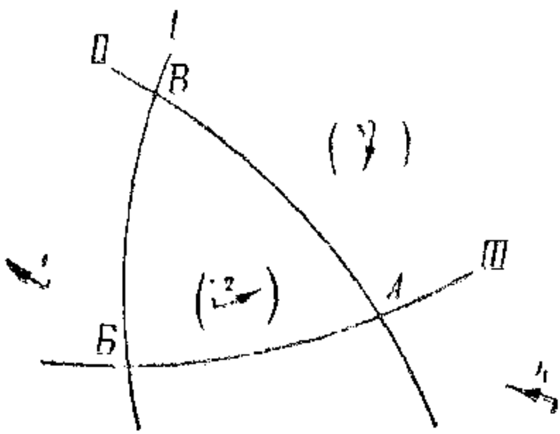

Рис 57.

купного действия трех плоскостей симметрии мы примем, что все эти три плоскости нереальны и не имеют значения порознь взятые. Мы получим случай *плоскостей тройной симметрии или тройного отражения*, отвечающий сложной симметрии. Процесс получения изображения 4 из предмета 1 мы назовем *тройным симметричным преобразованием*. Нетрудно видеть, что если плоскости I, II и III взаимно перпендикулярны и если все они

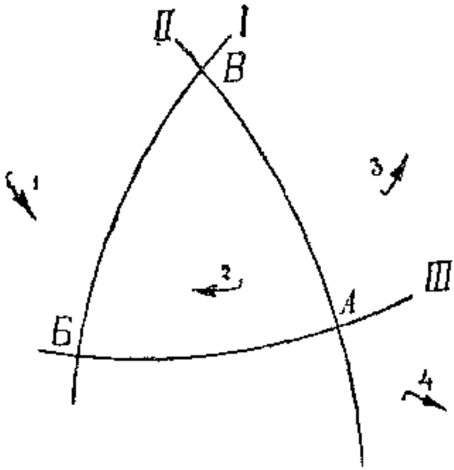

Рис. 58.

составляют систему плоскостей тройной симметрии, то их совокупное действие приведет к одному лишь центру симметрии.

Интересно, что число изображений (включая и предмет), к которому приводит тройное симметричное преобразование, равно *четверти* всего того числа изображений, которое получилось бы, если бы все плоскости действовали самостоятельно. Поэтому мы назовем этот случай симметрии *четвертной симметрией*, или, по-гречески, *тетартосимметрией*.

Мы связали пока две и три плоскости симметрии условием действовать лишь совместно. Что же получится, если к трем плоскостям присоединить еще и четвертую? Получим ли мы новый случай симметрии, не входящий в уже известный нам случай простой и сложной симметрии? Оказывается, что нет, ничего нового мы не получим.

Действительно, отразив изображение 4-е, симметрично равное 1-му, мы получим изображение совместимо равное 1-му, т.-е. такое же, как и 3-е изображение, и мы можем совместить это новое изображение с 1-м поворотом на какой-нибудь оси, т.-е. получим случай оси симметрии. Следующее отражение — в пятой плоскости — даст нам зеркальное отражение изображения, повернутого на оси, следовательно, сложную симметрию и т. д.; мы не придем ни к чему новому. Из этого мы заключаем, что *трехгранный угол плоскостей симметрии есть самая общая их комбинация и что, кроме полной, половинной и четвертной симметрии, никакого вида симметрии больше не существует.*

Итак, положив в исходный пункт отправления плоскость симметрии, мы не только внесли в понятие симметрии единство и могли обнять все частные случаи, но и приобрели полную уверенность, что мы исчерпывающим образом исследовали природу симметрии.

Но, кроме теоретического значения, проводимый в этой главе взгляд на симметрию имеет еще и практическое значение.

Представим себе, что нам дана фигура, симметричная относительно одних плоскостей симметрии, т.-е. полносимметричная. Нам известно при этом расположение в ней плоскостей симметрии и их число. Мы можем из этой фигуры вывести целый ряд симметричных фигур, родственных ей с половинной и четвертной симметрией. Нам стоит лишь связать уже имеющиеся плоскости симметрии условием действовать по две и по три, нисколько не меняя ни их расположения, ни их числа, и мы получим ряд фигур, симметричных относительно осей симметрии или же обладающих сложной симметрией; иначе говоря, задача о нахождении вида симметрии, удовлетворяющего каким-нибудь заданным наперед условиям, приводится прежде всего к нахождению соответствующих комбинаций одних лишь плоскостей симметрии, а это в значительной мере упрощает решение вопроса.

Наконец, и еще одна важная подробность. Так как все дело сводится на трехгранный угол плоскостей симметрии, то каждый частный случай симметрии непременно характеризуется особым трехгранным углом, и очень легко найти способ точно описать этот угол, стоит лишь указать на величину трех углов между его плоскостями. Эти углы будут всегда целою частью 180^0, так как это углы между плоскостями симметрии, и, следовательно, достаточно указать на то, какие это части; напр., написав 2, 3, 4, мы обозначим тем самым, что углы нашего трехгранного угла равны $180^0 : 2 = 90^0$, $180^0 : 3 = 60^0$ и $180^0 : 4 = 45^0$. Написав эти три числа рядом, заключив их в скобки и поставив перед скобками букву S (начальную букву французского слова symmetrie), мы получим *символ* нашего трехгранного угла плоскостей симметрии — S (234). Этот символ характеризует и всю симметрию фигуры, так как прочие плоскости симметрии фигуры представляют лишь калейдоскопическое повторение плоскостей трехгранного угла друг в друге. Мы можем эти символы распространить на половинную и четвертную симметрию. Условимся только под каждой цифрой символа понимать и сторону трехгранного угла, противолежащую углу, обозначенному этой цифрой, и обозначать эту сторону значком ', если она становится плоскостью двойного, и значком ", если она становится плоскостью тройного отражения. Таким образом, S(2'3'4') будет символ трехгранного угла симметрии, с углами между гранями в 90°, 60° и 45°, в котором грани, противолежащие углам в 90° и в 45°, становятся плоскостями двойного отражения. Наконец, символ S (2"3"4")означает трехгранный угол с теми же углами между его гранями, но в котором все грани связаны условием тройного отражения. Так как по углам между гранями можно всегда построить трехгранный угол, то такими символами вполне определяется вся симметрия фигуры. Многие авторы предлагали свои символы для обозначения симметрии, но символы эти не имели пространственного значения, по ним лишь можно было судить о числе плоскостей и осей симметрии в фигуре, о порядке осей и о присутствии или отсутствии центра симметрии, и если и приводились, напр., углы между осями симметрии, то все же по этим углам нельзя было судить о действительном расположении осей в пространстве.

В результате этой главы у нас является возможность кратко и просто ответить на вопрос, что же такое симметрия? Очевидно, *симметрия состоит в правильном чередовании одинаковых частей фигуры, вызываемом присутствием в этой фигуре зеркальных плоскостей симметрии, действующих порознь, попарно и по три.*

В заключение скажем еще несколько слов о симметрии бесконечных систем фигур, о том, каким же образом возможно поступательное и винтовое перемещение выразить помощью зеркальных плоскостей. Это очень легко сделать. Плоскости симметрии, параллельные друг другу, повторяют и самих себя и изображения бесконечное число раз. Посмотрите на изображение свечи, поставленной между двумя зеркалами, висящими на противоположных стенах. Этих изображений бесчисленное множество, по крайней мере, их было бы бесчисленное множество, если бы мы могли смотреть, не заслоняя свечи или ее изображений, и если бы яркость изображений не ослабевала от многократного отражения света. Некоторая трудность еще является при применении зеркальной плоскости к винтовым перемещениям, но и тут мы избегнем неудобства, приняв плоскости, отражающие только одной своей стороною, как наше обыкновенное зеркало.

Все, что было говорено до сих пор о симметрии, касалось так называемой *прямоугольной* или *ортогональной* симметрии, в которой изображение точки и сама точка находятся на линии, перпендикулярной к плоскости симметрии, на равных расстояниях от этой плоскости. Но можно вместо перпендикуляра взять линию, наклонную к плоскости, и мы получим так называемую *косую* симметрию. В двух предметах, симметричных друг другу относительно плоскости косой симметрии, все симметричные друг другу точки лежат на параллельных прямых, одинаково наклоненых к плоскости косой симметрии, и на одинаковых от нее расстояниях по ту и другую ее сторону. Такая косая симметрия находит себе применение при изучении свойств кристаллов, но мы ее подробнее касаться не будем. В косой симметрии мы видим пример одного из возможных обобщений понятия о симметрии, нисколько, однакоже, не меняющих сущности этого понятия.

X.

Симметрия в мире животных.

Представим себе, что нам необходимо защитить площадь, имеющую вид правильного треугольника (рис. 59), от какой-либо внешней опасности. Мы защитим ее изгородью, расположенной по всей длине контура треугольника. Шесть таких же треугольных площадей потребуют для своей защиты изгороди вшестеро длиннее. Но если мы сложим все шесть треугольников в один шестиугольник, то нам придется построить лишь вдвое более длинную изгородь, как это ясно из рис. 60, показывающего, что контур такого шестиугольника толь-

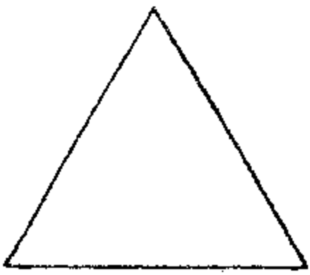

Рис. 59.

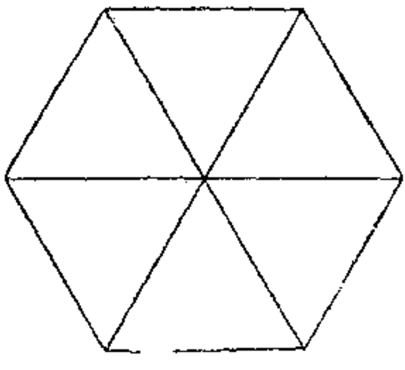

Рис. 60.

ко вдвое длиннее контура треугольника. Таким образом, мы защитили вшестеро бóльшую площадь лишь вдвое более длинной изгородью. В этом отношении шестиугольник оказался гораздо более экономной фигурой, чем треугольник.

Здесь мы имеем пример выгоды, приносимой симметрией: сложив несколько одинаковых частей в одну общую симметричную фигуру, мы сделали эту фигуру удобнее для известных целей,—в данном случае для целей защиты от влияния вредных внешних условий. Обратим еще особое внимание на то весьма важное обстоятельство, что мы при этом достигаем большей экономии и большей устойчивости по отношению к влиянию внешних условий только тем, что *однообразно* воспроизводим один и тот же треугольник, как часть одной более симметричной фигуры. Итак, слагая одну симметричную фигуру из нескольких одинаковых простых частей, мы можем иногда однообразным повторением одной такой части, не вводя ровно ничего нового, достичь известной экономии. Этим принципом широко пользуется природа в построении своих творений. Животные и растения должны постоянно защищать себя от вредных внешних влияний, и они этого могут достичь наиболее экономно и совершенно, если будут устроены наподобие нашего шестиугольника: построивши одну часть организма, природе, так сказать, нечего тратить усилия на изобретение новых частей другого устройства,—она просто складывает несколько одинаковых частей в один симметрический организм и получает тело большего объема, но с поверхностью относительно гораздо меньшею, чем поверхность отдельной части.

Принцип экономии проходит красною нитью через все явления природы: вода, текущая с возвышенности, течет по кратчайшему пути, луч света проходит между двумя точками по пути, требующему наименьшего времени, и т. д.,—одним словом, природа всегда стремится произвести все наиболее экономным образом, возможным при данных условиях. Эта экономия составляет как бы цель, которую природа стремится осуществить, и эта целесообразность явлений природы многих наводит на мысль о некоем Разуме, управляющем природой и ведущем ее к определенной, но для нас в большинстве случаев остающейся сокрытой цели. Такое толкование явлений природы, однакоже, отвергается точной наукой, ставящей себе задачу объяснить причинную связь между явлениями. Если мы знаем, что луч света выбирает кратчайший путь для своего прохождения, то мы, изучая свойства света, стараемся уяснить себе, почему именно это так бывает. И действительно, учение о свете нам вполне доказывает, что луч распространяется по прямой линии только потому, что он при обыкновенных условиях, вследствие известных причин, иначе распространяться не может. Если вода течет вниз по кратчайшему расстоянию, то мы знаем, почему это она делает. Один принцип целесообразности нас удовлетворить не может, мы считаем явление для нас только тогда совершенно ясным, когда знаем, как оно возникает и какие причины его вызывают. Однакоже часто мы не в состоянии раскрыть причинную связь между явлениями, и в таких случаях мы охотно прибегаем в наших рассуждениях к общим принципам, примером которых является принцип экономии.

Построенный по типу симметричного шестиугольника, организм обладает симметриею, которую биологи называют *лучевою*. По принятой нами терминологии это будет симметрия с осью симметрии и с несколькими плоскостями симметрии, через эту ось проходящими. Наивысшая степень такой симметрии есть симметрия шара, где осей и плоскостей бесконечное множество. Примером такой шаровой симметрии, или, как ее называют зоологи, *гомаксонной*, может служить вольвокс (Volvox, рис. 61), состоящий из микроскопического шарообразного скопления клеточек. Такая шарообразная форма, которую, между прочим, принимает капля жидкости, свободно висящая внутри другой жидкости, с ней не смешивающейся, может, разумеется, существовать лишь у свободно плавающих в воде организмов. Лишь только такой организм принужден будет опуститься на дно и по нем ползать, вступает в действие сила тяжести, сплющивающая сверху вниз пластическое тело животного, при чем появляется брюшная и спинная сторона. Брюшная поверхность делает возможным для животного более тесное соприкосновение с поверхностью, по которой оно ползает, и тем облегчает ему это ползанье. От шарообразной формы один шаг до вытянутой, с одной

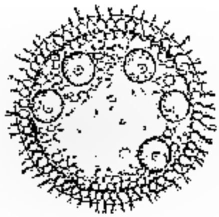

Рис. 61

осью вращения и бесчисленным множеством меридианных плоскостей симметрии. Такие формы называются *монаксонными*, и пример их приведен на рис. 62, изображающем в разрезе одну из стадий развития многих животных, называемую гаструлей.

Рис. 62.

Строение, подобное нашему шестиугольнику, оказывается все же не во всех отношениях удобно для животного. Животные заинтересованы в том, чтобы их поверхность была достаточно велика, так как они этой поверхностью дышат, чувствуют и воспринимают пищу. И мы, действительно, замечаем, что поверхность организмов довольно велика, но она как бы продолжается внутрь организма, образуя в нем полости и каналы; наружу же организм своей поверхности по возможности старается не увеличивать, ибо этим нарушился бы существенно принцип экономии в средствах самозащиты. Животные, однако, нарушают в одном отношении принцип наименьшей поверхности: им необходимо бывает увеличить свою поверхность наружу для того, чтобы хватать свою пищу. Чтобы не итти совершенно в разрез с общим принципом, животные образуют на своей поверхности отростки — щупальца; часть внешней поверхности вытягивается в отростки также лучисто-симметрично расположенные, как и части тела животного. Если при этом в борьбе за существование животное потеряет одно или несколько щупалец, то это еще не беда: обыкновенно щупальца вновь вырастают.

Рис. 63 представляет гомаксонную микроскопическую корненожку (Actinosphaerium), снабженную лучисто расположенными отростками; на рис. 64 справа изображена взрослая морская лилия с ее пятилучевой симметрией и с пятью парами длинных щупалец.

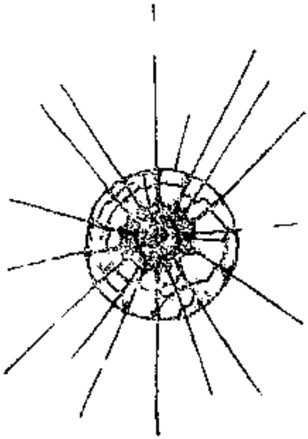

Рис. 63.

Для примера животных лучистой симметрии укажем на морскую лилию (Antedon или Commatula), рис. 64, морскую звезду (Echinaster scutus), рис. 65, медузу (Phyalidium variabile) (рис. 66) и морского ежа (Strongylocentrotus droebachiauus). Рис. 67 изображает известковую скорлупу этого ежа, составленную из пластинок, при чем слева скорлупа изображена со спинной, справа с брюшной стороны. Морская лилия, морская звезда и морской еж дают пример пятилучевой симметрии, медуза же—четырехлучевой.

Лучевая симметрия наиболее удобна для животных, ведущих сидячий образ жизни: не будучи в состоянии перемещаться и поворачивать своего тела, они, благодаря одинаковому устройству своего тела вокруг срединной оси, могут одинаково реагировать по различным направлениям. Способность перемещаться, свойственная громадному большинству животных, не только делает излишней лучевую симметрию, но, как сейчас увидим, даже весьма мало с нею мирится. Для плавания лучевая симметрия еще пригодна, и мы знаем, напр., медуз, обладающих лучевой симметрией, которые плавают по направлению своей оси симметрии, выталкивая из себя воду сокращением краев своего колокольчатого тела. Но для других способов перемещения этот род симметрии становится весьма неудобным. Собственно говоря, по своей симметрии лучевое животное должно пол-

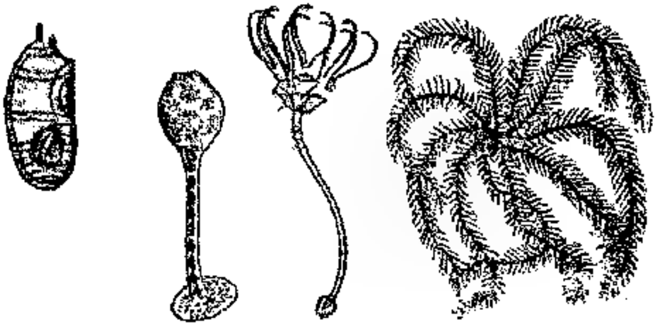

Рис. 64.

зать как бы сразу во все стороны, что, конечно, невозможно, и если оно перемещается в сторону одного луча, то остальные лучи служат ему скорее помехой, чем подмогой, и передвижение может быть только медленным и неуклюжим. Вспомним, напр., передвижение по дну морских звезд, которых часто приходится видеть в больших аквариумах с морской водой. Есть мелкие микроскопические животные — корненожки, представляющиеся иногда в виде маленького комочка слизи, в спокойном состоянии шарообразного. Такой комочек ползает, вытягивая из себя так называемые ложноножки, отростки той же слизи. И если вытянется такая ложноножка или несколько их в одном направлении, то, разумеется, высокая симметрия шарообразного комочка сразу пропадает, и самое большее остается одна плоскость симметрии в направлении перемещения. Таким образом, по-

Рис. 65.

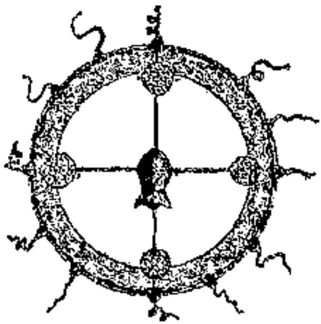

Рис 66.

ступательное перемещение находит в лучистой симметрии себе естественное препятствие. Животное вытягивается по направлению перемещения и, наоборот, перемещается в том направлении, в котором оно вытянуто. Многие животные с лучевой симметрией, свободно перемещающиеся, произошли из неподвижных форм. На рис. 64 изображены четыре стадии развития морской лилии. Налево изображена свободно плавающая личинка, которая в известный момент своего существования прикрепляется ко дну моря и дает начало лучевой морской лилии. На рисунке видно, как постепенно образуются стебелек и щупальца. В зрелом состоянии эта лилия отделяется от стебля и свободно плавает. Морские звезды и морские ежи уже совершенно не прикрепляются ко дну, но и они, по всей вероятности, произошли от неподвижных форм. Некоторые ежи имеют вытянутую (рис. 68) в одном направлении форму, несомненно вызванную свободным перемещением этого животного

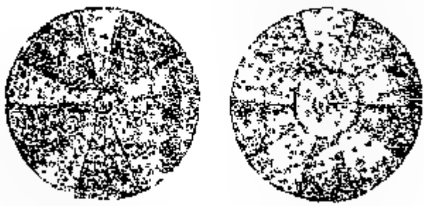

Рис. 67.

Такое удлинение в одном направлении резко нарушает лучевую симметрию и превращает ее в симметрию с одной плоскостью симметрии. Рис. 69 представляет медузу, также утратившую свою лучевую симметрию; через ее тело можно провести лишь две плоскости симметрии.

Поступательное движение также весьма плохо осуществимо и для вполне несимметрических форм. Есть только один случай симметрии, который не только не мешает поступательному движению, но, наоборот, в высшей степени ему способствует. Это-та симметрия, при которой животное устроено одинаково с одной и с другой стороны направления перемещения,—симметрия с одной вертикальной плоскостью, т.-е. та симметрия, которая у зоологов называется *двусторонней*. Животные, наиболее совершенно одаренные способностью перемещения, обладают как раз этой степенью симметрии. Представьте себе насекомое, лишенное трех своих лапок с одной стороны своего тела, или млекопитающее без пары ног, правых или левых,

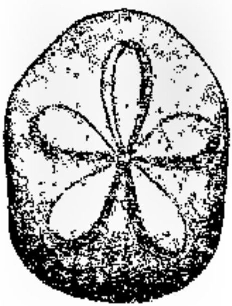

Рис. 68.

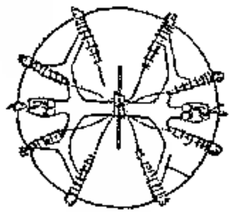

Рис. 69.

или, наконец, птицу без одного крыла,—может ли такое искалеченное животное перемещаться прямолинейно поступательно? Очевидно, нет, так как такое перемещение производится совместным действием органов перемещения, находящихся по правую и по левую сторону тела животного. Кроме того, для правильности поступательного перемещения необходимо, чтобы тело животного было одинакового веса и одинаковой формы справа и слева, а это достигается проще всего тем, что правая и левая часть тела устроены одинаково, состоят из одинаковых симметричных и симметрично расположенных органов. Если в животном органы расположены несимметрично, как, напр. у улитки (рис. 70), где эти органы помещены в свернутой спиралью раковине, то у такого животного мы часто найдем симметричный орган передвижения. У той же улитки, напр., имеется так называемая подошва (нога), т.-е. та симметричная часть животного, на которой оно ползает и на спине которой помещается спиральная часть тела с раковиной. Замечательно, что личинки животных с лучевой симметриею, ведущих сидячий образ жизни, обладают двусторонней симметрией, и эти личинки свободно плавают.

Рис. 70.

Рассматривая подробно симметрию животных, мы заметим, что она в очень редких случаях выдерживается до конца, т.-е. распространяется на все органы животного. Мы очень часто находим, что некоторые органы или их части своим положением в теле нарушают эту симметрию. Напр., у морских звезд мы находим так называемую Мадрепорову пластинку, помещающуюся не на оси животного и сильно нарушающую симметрию. У человека печень расположена на правой стороне тела, а сердце—на левой; сказать, что тело человека действительно симметрично относительно вертикальной плоскости в точном смысле, вовсе нельзя. Симметрия также не может выдерживаться у животных с математическою точностью. Немыслимо, чтобы лучи лучевого или стороны двустороннего животного были совершенно тожественны по своей форме, величине и строению. Слагаясь в большинстве случаев из податливого, пластического вещества или из множества клеточек, животные не могут из себя представить математически точных тел. Пластичность и подвижность животного организма, можно сказать, прямо противоположна той неподвижной уравновешенности частей, которая связана с симметрией. Поэтому мы везде в животном царстве имеем дело с большей или меньшей степенью нарушения симметрии, с *асимметрией*. Такая асимметрия может иметь или внешние причины, -поранение части тела животного в ранний период его развития, тогда мы имеем перед собою искалеченный индивид, или же причины ее могут лежать в более внутренних свойствах неделимого, в глубоких нарушениях нормальных свойств самых элементов, из которых слагается организм. Тут мы уже заходим в область явлений патологических и таких, которые сопровождают дегенерацию, вырождение неделимого. Конечно, иногда трудно бывает решить, как глубоко коренятся в неделимом причины нарушения его нормального развития, а вместе с ними и причины асимметрии, как внешнего показателя этого нарушения. Здесь возможна только бо̀льшая или меньшая вероятность выводов. Констатируя асимметрию, внешней причины которой мы отыскать не можем, мы предполагаем, что эта асимметрия служит внешним признаком общей ненормальности или дегенеративности неделимого, но существует ли на самом деле эта общая ненормальность или дегенеративность, мы, разумеется, по этому одному признаку еще не можем заключить. Известно, что сильно выраженная асимметрия человеческого лица и вообще тела считается признаком дегенеративности и что, напр., ненормальность в симметрии формы сопровождается ненормальностью и внутренних, психических качеств индивида, что выражается, напр., в его наклонностях к преступлениям. Здесь под асимметрией надо понимать не столько уклонение от симметрии в точном смысле этого слова, сколько уклонение от нормального типа вообще, независимо от того, нарушается ли этим уклонением симметрия, или нет; например, редкие зубы составляют уклонение от нормы и считаются признаком дегенеративности, но симметрии лица они вовсе не нарушают. Асимметрия может служить легким наружным и наглядным признаком ненормальности неделимого, но этот признак является весьма ненадежным, и тем с большею осторожностью мы должны им руководствоваться на практике. Если лицо человека подходит под преступный тип Ломброзо, то из этого еще далеко не следует, что этот человек имеет склонность к преступлению.

В животном царстве очень распространен еще один случай симметрии, который зоологи называют метамерией и не считают случаем симметрии. Метамерия состоит в том, что животное по длине своей состоит из одинаковых и одинаково устроенных члеников; только оба или несколько члеников по концам животного отличаются от остальных. На рис. 71 изображено метамерное животное из отдела кольчатых червей. Зоологи до известной степени в праве не причислять метамерию к симметрии, потому что, как мы видели в учении о симметрии, прямолинейный ряд одинаковых предметов только тогда можно считать безусловно симметричным, когда он бесконечен. Но все-таки мы в метамерном животном имеем осуществление того же принципа соединения одинаковых частей в одно целое, каким характеризуется всякая симметрия.

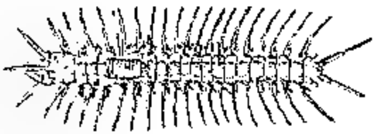

Рис. 71.

Метамерия редко является в чистой форме, когда много следующих один за другим члеников животного совершенно одинаковы. Обыкновенно природа изменяет отдельные членики постепенно, приноравливая их к различным целям, так что теряется прежнее однообразие животного в продольном направлении, но все же животное остается более или менее явственно членистым, как, напр., насекомое. У высших животных тоже можно наблюдать следы метамерии. Например, у человека она выражается в расположении нервов, выходящих из головного и спинного мозга.

Симметрия бесконечного числа фигур находит иногда еще иное осуществление в царстве животных. Чешуя рыб, напр., расположена по закону параллелограмматической сетки, но этот род симметрии у животных не играет такой роли, как у растений и кристаллов, где, как увидим, он осуществляется в высокой мере и может быть выражен математически точными законами.

Итак, в животном мире симметрия не представляет признака, существенно определяющего свойства животного организма. Пластичность вещества, составляющего тело животных, мало способствует сохранению геометрически правильных, косых симметричных форм, и симметрия эта постоянно изменяется сообразно образу жизни животного и его внутренней организации. Поэтому мы можем в мире животных проследить законы симметрии лишь в самой общей форме, которая еще не поддается точной математической формулировке.

XI.

Симметрия в мире растений.

Те общие соображения о симметрии, которые были изложены в главе о животных, применимы, разумеется, и к растительным организмам. От животных растения отличаются вообще своей неподвижностью и в соответствии с этим меньшею пластичностью своих тканей. Поэтому мы в праве ожидать, что в растениях мы встретим более благоприятные условия для проявления симметрии. Наблюдение, действительно, широко подтверждает такое предположение. Как в животных, так и в растениях природа постоянно осуществляет принцип экономии. В растении мы видим также, как целый организм составляется из однообразного повторения одинаковых и одинаково расположенных друг относительно друга частей.

Однакоже между симметрией животных и растений есть громадная разница. Если для жизни животных в большинстве случаев выгодно свести внешнюю поверхность тѣла до возможно меньшего размера, для растений это является совершенно невозможным. Растение устроено так, что должно питаться исключительно внешнею своею поверхностью. с этой внешней поверхностью соприкасаются, с одной стороны, воздух, составные части которого усваиваются листьями, с другой -минеральные составные части почвы, усваиваемые корнями. Так как такое усвоение производится поверхностью растения, то эта поверхность должна иметь большую площадь. Она обыкновенно разбивается на множество отдельных частей,—листьев и корней. Помимо этой существенной разницы, симметрия растений, как и животных, сводится на симметрию его органов и на симметрию взаимного расположения этих органов. Как и у неподвижных животных, у растений преобладает лучевая форма симметрии.

Типичным примером такой лучистой симметрии может служить круглый ствол наших двудольных деревьев с его годичными концентрическими кольцами и радиальными лучами. Не у всех растений, однако, ствол или стебель бывает круглый: иногда он бывает четырехгранным или трехгранным.

Листья по своему физиологическому назначению должны обладать большою поверхностью, так как они служат для усвоения углекислоты из воздуха, для дыхания и испарения. Поэтому наиболее совершенная форма листа должна быть пластинчатая, а так как лист одним концом прикреплен к стеблю, то его пластинка естественно должна обладать двусторонней симметрией. Эта симметрия иногда не выдерживается строго, и по одну сторону своего срединного нерва лист бывает больше, чем по другую. Но и в листе часто остаются следы лучевой симметрии: вспомним почти круглый лист настурции с прикрепленным почти в средине его черешком, соединенным с листом почти перпендикулярно; вспомним разрезной лист конского каштана, лапчатый лист клена.

Части цветка произошли из видоизмененных листьев, поэтому некоторые из этих частей сохраняют пластинчатую форму, а иногда и двустороннюю симметрию листа, как лепестки и чашелистники. В цветах растений природа, несомненно, воплотила идею красоты, а потому интересно будет остановиться на симметрии именно этих органов растений.

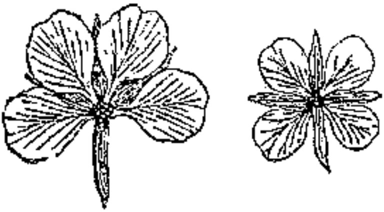

Рис. 72.

Рис. 73.

Совершенно несимметричные цветы встречаются у растений очень редко, обыкновенно же они бывают с одной плоскостью симметрии, так называемые зигоморфные (рис. 72 слева), и с несколькими плоскостями симметрии — актиноморфные цветы (рис. 72 справа и рис. 73).

Примером зигоморфного цветка может служить цветок какого-нибудь мотылькового растения, например, гороха, или цветок Иван-чая (Epilobium angustifolium, рис. 72 слева).

Чрезвычайно интересно, что двусторонняя симметрия цветка часто бывает внешнего происхождения, а именно, она образуется под влиянием силы тяжести. Это доказывается следующим простым опытом. На время цветения растение прикрепляют к особому аппарату—клиностату, снабженному часовым механизмом, помощью которого растение можно вращать в определенном направлении. Если вращать растение так, чтобы верхушка его то опускалась, то поднималась, то сила тяжести будет во все время вращения действовать на растение по различным направлениям, и совершенно утратится ее характерное постоянное действие в одном лишь направлении — сверху вниз. Оказывается, что распустившиеся в таких условиях зигоморфные цветы становятся лучевыми, актиноморфными. На рис. 72 справа изображен цветок Иван-чая, превращенный вышеописанными способами в актиноморфный.

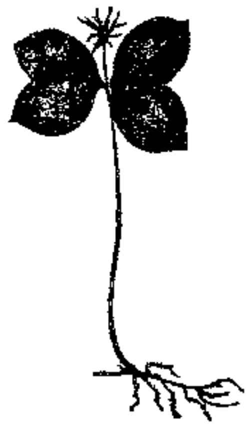

Рис. 74.

Симметрия актиноморфных цветов бывает тройная, четверная и пятерная. Она, очевидно, имеет тесную связь с внутренней природой растения, так как у однодольных растений мы наблюдаем обыкновенно тройную симметрию цветка, у двудольных же пятерную и иногда четверную. У однодольных тройная симметрия так распространена, что однодольное растение вороний глаз, Paris quadrifolia (рис. 74), с четверной симметрией составляет интересное исключение. У этого растения четверная симметрия распространяется и на расположение листьев и на цветок.

Симметрия цветка распространяется также и на плод, составные части которого в молодости составляют лишь часть цветка. Припомним яблоко или грушу с их радиальной симметрией и стручок гороха с двусторонней.

Все перечисленные случаи симметрии частей растений общеизвестны, и останавливаться на них подробнее нет надобности. Но в высшей степени замечательно и имеет глубокий философский смысл то проявление симметрии в растениях, которое выражается в периодическом повторении одинаковых частей растения по его длине. Мы видели выше, когда говорили о симметрии вообще, что прямолинейная последовательность одинаковых равноотстоящих предметов есть особый вид симметрии. Для полноты симметрии, однако, необходимо, чтобы такой ряд был бесконечен. Если мы возьмем какое-нибудь высшее растение, положим, дерево, то увидим, что оно растет вверх своей верхушечной почкой и растет периодически, увеличиваясь каждый год на определенную длину. Теоретически тут мы имеем дело с беспредельным периодическим повторением одного и того же процесса роста, который в действительности не беспределен только благодаря различным противодействиям, в виде силы тяжести, в виде постепенного истощения жизненной энергии организма и необходимости возобновления последней путем полового размножения и проч. Каждое новое растение, вырастающее из семени старого, представляет, в свою очередь, лишь один из периодов в росте бесконечной непрерывной цепи происходящих друг от друга неделимых. Таким образом, мы видим, что тот род симметрии, который характеризуется элементом поступательного перемещения, широко осуществляется в растениях, насколько это позволяет природа растительного организма и внешние условия его существования на земле.

Эта симметрия поступания выражается в высшей степени рельефно в так называемом *листорасположении*. Под этим термином надо понимать не только расположение листьев на стебле и ветвях, но и расположение вообще органов, происшедших из листьев — частей цветка, чешуек в почке, в еловой шишке и т. п.

Закон, по которому расположены листовые органы на побеге, можно определить следующим образом. Срежем побег перпендикулярно к его длине, на уровне одного листа. Затем от основания этого листа проведем по поверхности побега кратчайшую линию к основанию листа, ближайшего к первому и к линии среза. Самый побег при этом мы вообразим себе в виде правильного круглого цилиндра. Чтобы перейти от первого листа ко второму, надо по круговой линии среза пройти некоторый путь, т.-е. повернуть цилиндр на некоторый угол, так называемый *угол расхождения* листьев, и затем пройти по образующей цилиндра, т.-е. по длине побега, некоторое расстояние. Таким образом, мы имеем характерные для винтовой оси поворот и поступательное перемещение. Заметим, что ботаники называют образующую цилиндра, проходящую через основание листа, *ортостихой*. Переходя по винту к следующему листу, мы опять должны сделать поворот на прежний угол расхождения и пройти по следующей ортостихе прежнее расстояние. Угол расхождения может быть целою частью не одного, а нескольких полных поворотов. Так, например, угол расхождения может быть равен $^2/_5$ окружности. Это значит, что цилиндр надо повернуть пять раз на оси для перехода от листа к листу, при чем за это время цилиндр совершит два полных оборота и придет в прежнее положение, при котором по винтовой линии мы дойдем до листа, помещающегося выше первого на одной с ним ортостихе. Мы прошли от листа к листу по так называемой *основной*, или *генетической*, *спирали*, прошли по двум ее полным оборотам и встретили по пути пять листьев, составляющих *листовой цикл*. Поэтому в данном случае угол расхождения, характеризующий листовой цикл, обозначается дробью $^2/_5$. В знаменателе этой дроби стоит число листьев цикла, а в числителе—число полных оборотов спирали.

На рис. 75 изображены два случая листорасположения, выражающиеся дробями $^1/_3$ и $^2/_5$. Рис. 76 представляет листорасположение клена, для которого надо принять две генетические спирали, идущие от двух взаимно противоположных листьев; для каждой спирали листоположение выразится дробью $^1/_2$.

Для изображения листового цикла служат диаграммы, на которых цилиндр заменяется конусом, а самый конус изображается так, как если бы мы на него смотрели сверху вниз,—основание его нам представится кругом, а вершина совпадет с центром этого круга; ортостихи заменятся образующими конуса и изобразятся радиусами круга, винтовая линия изобразится спиралью, огибающею центр круга и оканчивающейся в этом центре. На рис. 77 80 представлены такие диаграммы для случаев листорасположения $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$ и $^3/_8$. Самые распространенные случаи изображаются дробями $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$, $^5/_{13}$, $^8/_{21}$, и $^{13}/_{34}$. Дроби эти имеют замечательное свойство: сумма числителей двух смеж-

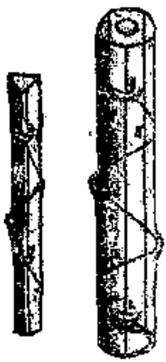

Рис. 75.

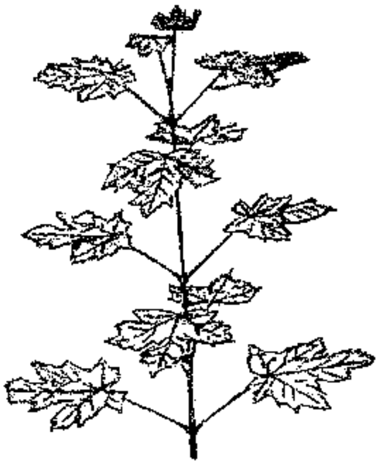

Рис. 76.

ных дробей дает числителя, сумма знаменателей— знаменателя дроби, следующей за двумя взятыми. дробями.

Можно считать листья по побегу и в обратную сторону. Тогда мы получим то же число листьев цикла, но число оборотов спирали будет иное, а именно оно будет равно дополнению числителя до знаменателя. Напр., если, считая в одном направлении, мы получим дробь $^{3}/_{8}$, то в другом получим $1-\frac{3}{8}=\frac{8-3}{8}=\frac{5}{8}$.

Переходя от листа к листу по генетической спирали, мы часто минуем лист, наиболее близкий к первоначальному, потому что он отстоит дальше от основания побега, чем лист на гене-

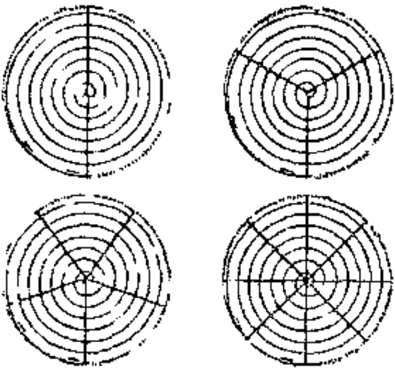

Рис. 77—80.

Рис. 81.

тической спирали, а между тем этот переход от листа к листу в ближайшем направлении иногда очень бросается в глаза. Это видно, напр., на еловой шишке (рис. 81), где чешуйки, ближайшие друг другу, так и хочется соединить спиралью и притом как вправо, так и влево. Эти бросающиеся в глаза винтовые линии называются у ботаников *парастихами*. Если назвать парастихой вообще каждую винтовую линию, проходящую через основания двух произвольно выбранных листьев, то в этом смысле и генетическая спираль, и ортостиха будут парастихами, выделяющимися, однакоже, из общего числа парастих своим специальным значением. Так как обе вышеупомянутые парастихи, соединяющие наиболее близкие друг к другу листовые органы, особенно выделяются из общего числа парастих, то мы назовем их *главными парастихами*. Полезно еще различить одну линию—линию горизонтального среза, не витую, разомкнутую, а кольцевую, замкнутую, проходящую только через один начальный нижний лист и представляющую окружность основания цилиндрического побега. Эту линию можно было бы назвать *гипостихой*; она представляет лишь частный случай парастих.

Следует заметить, что на одной парастихе расположены не только те два листа, через которые она проведена, но и целый ряд листьев. Если перенумеровать листья вдоль по генетической спирали, то окажется, что номера листьев, расположенных на одной парастихе, разнятся между собою на какое-нибудь постоянное число, напр.: 0, 5, 10, 15 и т. д., или: 3, 11, 19, 27 и т. д., при чем эта разница одинакова у парастих одного направления, параллельных друг к другу, и притом равна числу таких парастих, которое можно сосчитать, обходя вокруг побега поперек: если при таком обходе мы сосчитаем пять парастих одного наклона, то номера листовых органов, расположенных на каждой из таких парастих будут отличаться друг от друга на 5, и т. д. Этим свойством парастих легко воспользоваться, чтобы перенумеровать листы на побеге. На рис.

82 представлена еловая шишка, развернутая на плоскости, при чем схематически чешуйки шишки обозначены шестиугольниками. На шишке бросаются в глаза два ряда главных парастих. Число более крутых парастих, подымающихся справа налево, —восемь, число менее крутых и подымающихся слева направо—пять. Среди шестиугольников легко проследить эти два ряда парастих и, следуя этим парастихам, легко перенумеровать

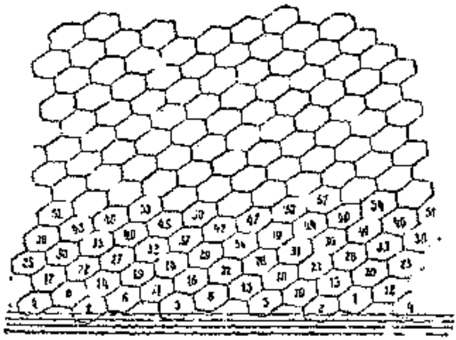

Рис. 82.

шестиугольники, приняв один из шестиугольников за номер первый. Заметим еще, что, взяв отношение чисел, характерных для обеих главных парастих, мы получим дробь, входящую в ряды дробей данного листорасположения. Напр., для данной шишки эта дробь будет $^5/_8$, входящая в ряды $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$, $^5/_{13}$..., так как $^3/_8 = 1 - {}^5/_8$. Приняв, что над первым номером как раз выше лежит номер 22, мы установим для нашей шишки листорасположение $^8/_{21}$; если сочтем, что еще ближе к вертикали номер 35, то листорасположение будет $^{13}/_{34}$.

Интересно ближе рассмотреть свойства чисел, характеризующих данное листорасположение. Напишем ряд дробей

$^1/_2, ^1/_3, ^2/_5, ^3/_8, ^5/_{13}, ^8/_{21}, ^{13}/_{34}, ^{21}/_{55}, ^{34}/_{89}$ и т. д.

Выразив эти обыкновенные дроби десятичными, получим, с точностью до четвертого знака:

$$0,5000;\ 0,3333;\ 0,4000;\ 0,3750;\ 0,3846;\ 0,3809;\ 0,3823;\ 0,3818;\ 0,3820.$$

Мы видим, что эти дроби постепенно становятся все ближе и ближе друг к другу. Конечно, если бы мы вычисляли наши десятичные дроби с большим числом знаков, мы бы и в последних из взятых дробей нашли более заметную разницу, и для того, чтобы ее сгладить, надо было бы взять дроби, еще более отдаленные от начала нашего ряда. Как бы мы далеко от начала ни взяли две смежные дроби, вычисляя достаточное число десятичных знаков, мы всегда найдем разницу, но эта разница будет становиться все меньше и меньше.

Возьмем вместо наших дробей число $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ [1]); это число не может быть определено точно, так как

---

[1]) Знак $\sqrt{5}$ читается „корень квадратный из пяти“ и означает число, которое, будучи помножено на само себя даст 5. Это число может быть определено лишь приблизительно и называется иррациональным. Иногда же такое число может быть определено точно; напр., $\sqrt{4}$ равен 2, $\sqrt{49} = 7$ и т. п. Число $\sqrt{5}$ равно приблизительно 2,23607, с точностью до пятого десятичного знака.

корень квадратный из пяти есть число *ирраціональное*, для выраженія своего требующее безконечного числа десятичных знаков. Первые восемь десятичных знаков числа $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ будут 0,38196601

Вычисляя, как угодно точно, т.-е с каким угодно числом десятичных знаков, наши дроби и число $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, мы найдем, что чем дальше от начала будем брать дробь, тем с большей точностью она будет воспроизводить это число, т.-е. тем меньше будет разница между дробью и нашим числом. Говорят, что ирраціональное число $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ есть *предел* дробей нашего ряда. Оно является вместе с тем истинным выраженіем для взятого листорасположенія. Мы пришли к неожиданному результату, что листорасположеніе выражается только на первый взгляд раціональными дробями, т.-е. дробями, числитель и знаменатель которых—целые числа, на самом же деле оно выражается ирраціональным числом. Для других случаев листорасположенія мы найдем и другие ирраціональные числа, подобные вышеуказанному. Раціональные дроби представляют только приблизительные значенія настоящей предельной величины, характеризующей листорасположеніе. Мы укажем еще на происхожденіе этих приблизительных величин. Число $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, как этому учит алгебра, представляет значеніе так называемой *непрерывной* дроби.

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

продолжающейся без конца. Действительно, вычисляя последовательно дроби

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2+\frac{1}{1}}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{2}{5},$$

и т. д., мы придем последовательно к каждой из обыкновенных дробей нашего ряда. Поэтому эти дроби называются *подходящими* дробями взятой непрерывной дроби. Они поочередно то больше, то меньше предельного значения всей непрерывной дроби.

Нельзя не отметить еще одного удивительного свойства чисел, характеризующих наиболее часто встречающиеся виды листорасположения, т.-е. ряда дробей $^1/_2, ^1/_3, ^2/_5, ^3/_8$ и т. д. Мы видели, что предельное значение этих дробей есть $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Оказывается, что если разделить длину, равную единице, на такие две части, чтобы вся длина относилась к большей части, как большая часть к меньшей, то большая часть будет $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, а меньшая $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Деление прямого отрезка на такие части называется *золотым делением*. Ему придают большое эстетическое значение и находят его в взаимном соотношении частей предметов, производящих на нас впечатление красоты, будут ли это творения природы, как, напр., красивое человеческое тело, или же произведение искусства, как, напр., красивое здание.

Рис 83.

Таков в общих чертах замечательный закон листорасположения. Мы потому подробнее остановились на нем, что он представляет самое блестящее приложение понятия о симметрии к учению о формах организмов. Мы еще вернемся к этому закону, когда будем говорить об аналогии между ним и законом кратных отношений в кристаллах.

Располагаясь винтом по побегу, листья как бы раскидываются во все стороны и не заслоняют друг друга от света, столь необходимого для жизни растений. Смотря на побег сверху, мы видим листорасположение в так называемой мозаике листьев (рис. 83).

XII.

Симметрия кристаллов.

Если в мире животных и растений симметрия не может считаться таким существенным признаком, который бы мог служить безусловным основанием для решения вопроса о сходстве и различии и для построения на этом признаке систематики животных и растений, то в мире кристаллов симметрия приобретает первостепенное значение и притом до такой степени, что все учение о симметрии в том виде, в каком оно изложено выше, разработано, главным образом, в виду его важности в изучении свойств кристаллов.

Вся систематика кристаллов, все их распределение на классы, составлено в настоящее время на основании их симметрии. Мало того, благодаря тому, что кристалл есть симметрическое тело, явилось возможным предсказать, какие классы кристаллов встречаются в природе и как велико число этих классов. Оказалось, что природа в данном случае крайне ограничена своими же собственными законами и не может осуществить более тридцати двух родов кристаллов, различных по симметрии. Эта возможность вывести наперед все случаи симметрии кристаллов является венцом учения о симметрии и показывает, насколько мы проникли в природу как симметрии вообще, так и в законы кристаллообразования в частности.

Рассматривая различные свойства кристалла, мы замечаем, что они вообще не одинаковы по различным направлениям. Так, свет, звук, теплота, электричество распространяются с различною скоростью по различным направлениям, при нагревании кристалл расширяется не одинаково по различным направлениям и т. д. При этом все параллельные и идущие в одну и ту же сторону направления считаются за одинаковые. Если же мы будем рассматривать различные части одного и того же кристалла, то мы в их свойствах не найдем никакой разницы. Все это характеризует кристалл, как *однородное тело*.

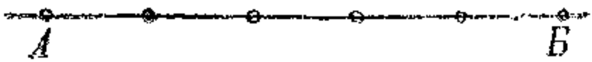

Рис. 84.

Мы можем однородность кристалла представить наглядно в виде чертежа или модели. Положим, что мы хотим выразить, что неограниченная прямая $AБ$ (рис. 84) однородна. Мы этого проще всего достигнем, нанеся на прямую по всей ее длине ряд равноотстоящих точек. Расстояние этих точек мы можем вообразить какой угодно величины, однакоже не столь малым, чтобы между этими точками не оставалось вовсе свободного участка прямой, ибо в противном случае мы вернемся опять к нашей сплошной прямой и ничего нового не достигнем. Итак, бесконечный ряд равноотстоящих точек изобразит нам направление в однородной среде. Так как в кристалле различные направления различны по свойствам, то другое направление в кристалле *АВ* (рис. 85) изобразится подобным же рядом, но с другим расстоянием точек. Ряды *А'Б'*, *А"Б"* и т. д., параллельные *АБ*, должны в силу однородности быть одинаковыми с рядом *АБ*, а ряды *аб*, *а'б'* *а"б"* одинаковыми с *АВ*. Мы получаем, таким образом, изображение однородной плоскости в кристалле в виде плоской сетки. Нетрудно догадаться, что изображением всей однород-

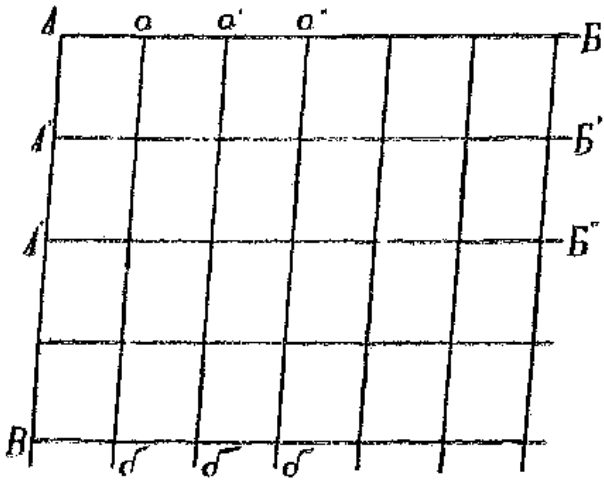

Рис. 85.

ной кристаллической среды, так сказать, всего вещества кристалла, будет пространственная решетка.

Пространственная решетка, однакоже, дает нам нечто большее, чем одно изображение однородности кристалла. Оказывается, что она дает возможность изобразить математически верно и внешние очертания кристалла. Эти очертания, как известно, состоят из плоских граней, как это видно, напр., на кристалле берилла (изумруда), изображенном на рис. 86. Грани кристалла расположены друг

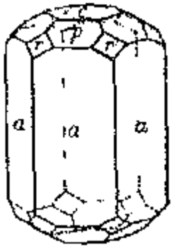

Рис. 86.

относительно друга не как-нибудь, а согласно закону, который может быть назван законом целых чисел. Его проще всего себе представить в такой форме. Если мы захотим ограничить нашу беспредельную пространственную решетку, то нам естественнее всего сделать это при помощи тех плоскостей, которые, так сказать, уже намечены в самой решетке ее узлами: мы будем разрезать нашу решетку так, чтобы разрез прошел через узлы решетки. Тогда, если OA, $OБ$ и OB (рис. 87)—три какие-нибудь не лежащие в одной плоскости ряда решетки, плоский разрез $AБB$ отрежет на рядах OA, $OБ$, OB от точки O целое число промежутков между точками на трех вышеуказанных рядах. И это будет с каждым разрезом; тело, вырезанное из решетки указанным способом плоскими разрезами, окажется ограниченным гранями, расположенными друг относительно друга по тому же закону целых чисел, по какому располагаются грани кристалла друг относительно друга. Таким образом, *пространственная решетка является точным изображением кристалла как со стороны его внутренней однородности, так и со стороны его внешнего ограничения*, а так как пространственная решетка есть фигура симметрическая, то отсюда ясно, что *кристалл прежде всего симметрическое тело, в котором симметрия распространяется и на все внутренние его свойства*. В этом лежит и объяснение всей важности учения о симметрии для кристаллов. Дальнейший ход рассуждения состоит в следующем. Если кристалл можно уподобить пространственной решотке, то, чтобы решить вопрос, какие случаи симметрии возможны в кристалле, надо решить этот вопрос относительно решетки и найти все возможные случаи ее симметрии. Ясно, что вопрос о симметрии физического тела — кри-

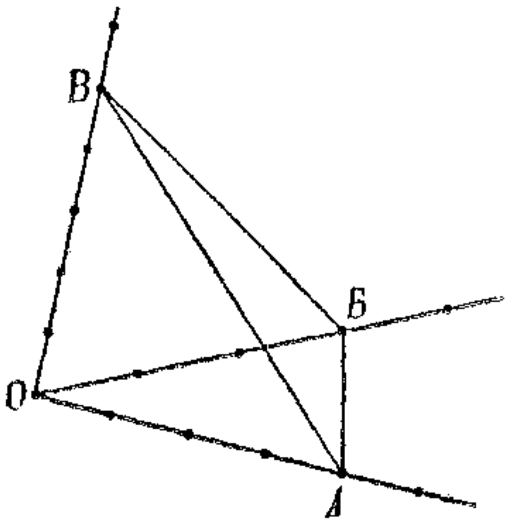

Рис. 87.

сталла этим путем приводится к простой геометрической задаче. Мы уже знаем, например (стр. 50), что в пространственной решетке возможны только оси симметрии второго, третьего, четвертого и шестого порядка. Оказывается, что природа не может осуществить в кристаллах пятерной симметрии, столь обычной в растениях, потому что этой симметрии не может быть в пространственных решетках.

Решение поставленной выше геометрической задачи приводит к тридцати двум классам кристаллов, различных по своей симметрии, и мы можем наверное утверждать, что в природе не может встретиться ни одного кристалла, который бы не входил в эти тридцать два класса. Но является обратный вопрос, — действительно ли нам известны все возможные в природе классы кристаллов? Оказывается, что мы еще не знаем всех классов, но в настоящее время нам остается неизвестным всего лишь один класс.

Чрезвычайно любопытно, что до последнего времени оставался неизвестным еще один класс, характеризующийся четверною осью сложной симметрии. Бравэ в первой половине прошлого столетия считал этот класс совершенно невозможным в природе и принимал только тридцать один класс кристаллов. Дело в том, что симметрия этого класса не может быть сведена на элементы симметрии — плоскость, ось и центр симметрии — и требует понятия о сложной симметрии. Это как раз та симметрия, которою обладает фигура, полученная из квадрата с косо загнутыми попеременно вверх и вниз углами (см. рис. 46, стр. 45). Позднейшие исследователи чувствовали, однако, возможность встретить когда-нибудь в природе класс кристаллов с такого рода симметрией и только из этого предчувствия перестроили все учение о симметрии, введя понятие о сложной симметрии. Как оказалось, предчувствие их не обмануло: в 1906 году хранителем минералогического музея Варшавского университета Сигизмундом Вейбергом (Zygmunt Weyberg) найден и исследован представитель этого класса. Это—искусственное химическое соединение, состоящее из кремния, алюминия, кальция и кислорода, которое Вейберг получил из сплава химических соединений указанных веществ. Соединение это дает очень хорошие, хотя и микроскопически мелкие кристаллики, но достаточные по своей величине для того, чтобы изучить совершенно точно их симметрию. Интересное открытие свое г. Вейберг опубликовал в трудах Краковской академии наук.

Скажем несколько самых общих замечаний о способе вывода всех возможных видов симметрии кристаллов.

Мы видели, что самая общая комбинация плоскостей симметрии, это трехгранный угол, дающий в пересечении с шаром, центр которого совпадает с вершиной угла, так называемый сферический треугольник. Так как плоскости симметрии в кристаллах могут образовать между собою лишь углы в 30^0, 45^0, 60^0 и 90^0, то углы такого сферического треугольника могут иметь только эти величины, ибо они-то и есть углы между плоскостями симметрии. Мы получим возможные треугольники, соединяя выше приведенные числа по три. Оказывается, что не всякое сочетание этих чисел возможно в треугольнике, так как сумма углов сферического треугольника должна быть больше 180^0. Таким образом, такой сферический треугольник, который бы содержал три угла по 45^0, невозможен потому что сумма его углов была бы равна 135^0. Также невозможен и треугольник с двумя углами по 30^0 и третьим в 60^0 и еще многие другие. Оказывается, что можно выбрать только треугольники с углами в 45^0, 60^0 и 90^0, в 60^0, 60^0 и 90^0; в 30^0, 90^0 и 90^0, в 45^0, 90^0 и 90^0, в 60^0, 90^0 и 90^0 и, наконец, в 90^0, 90^0 и 90^0,—всего шесть случаев. Кроме того, возможно сочетание не трех плоскостей симметрии в виде трехгранного угла, а двух, при чем угол этих плоскостей может быть в 30^0, в 45^0, в 60^0 или в 90^0,—всего четыре случая. Наконец, возможен еще случай, когда, кроме одной плоскости симметрии, нет никакой другой. Мы получаем одиннадцать случаев симметрии с одними лишь плоскостями симметрии. Из них остальные случаи получаются применением к этим одиннадцати случаям принципа плоскостей симметрии, действующих по две и по три вместе. Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности.

Таким образом, в кристалле мы видим тело с известной степенью симметрии. Однако, эта симметрия так же, как и в организмах, в кристаллах сплошь и рядом искажается влиянием внешних сил. При этом все же это влияние внешних сил обыкновенно не распространяется на внутреннюю массу кристалла и касается, главным образом, его внешних ограничений.

Про многие вещества говорят, что они кристаллизуются в кубах, напр., поваренная соль, бромистый калий и натрий, свинцовый блеск и проч. Но если мы рассмотрим так называемые кубические кристаллы этих веществ, то ни одного из них не признаем кубом в геометрическом смысле этого слова. Мы увидим обыкновенно фигуры, которые в геометрии называются прямоугольными параллелепипедами; их грани будут не квадраты, а прямоугольники. И все-таки кристаллограф сочтет эти кристаллы за кубы и будет по-своему прав: если бы кристаллы этих веществ при их образовании изъять из действия внешних условий, то они действительно оказались бы кубами. Чтобы убедиться в этом и понять, насколько и в каком направлении влияют внешние условия на образование и внешний вид кристаллов, проследим образование какого-нибудь кристалла из раствора. Кристалл может образоваться лишь из пересыщенного раствора, т.-е. из такого, в котором находится избыток растворенного твердого вещества. Это вещество выделяется на дне сосуда, содержащего раствор, и выделившийся маленький кристаллик начинает расти на счет упомянутого избытка твердого вещества, которое он отымает у окружающего раствора. Часть раствора, прилегающая непосредственно к растущему кристаллику, становится легче и подымается в виде струйки с кристалла к поверхности раствора, а на место утекшей части раствора, уже отложившей свой избыток твердого вещества, притекает к кристаллу новая порция пересыщенного раствора, в свою очередь питающая кристаллы и затем устремляющаяся вверх. Растущий кристалл становится источником постоянного тока раствора. Такой *концентрационный* ток изображен на приложенных фотографических снимках (рис. 88), снятых с растущего кристалла автором этих строк при помощи особого способа, позволяющего явственно наблюдать явления, подобные, напр., движению воздуха над нагретыми предметами.

Легко видеть, что свежие порции раствора не могут притекать к кристаллу сверху, так как этому препятствует концентрационный поток, а потому эти порции притекают только с боков и оставляют свой избыток твердого вещества прежде всего и преимущественно на боках кристалла. От этого кристалл растет больше в горизонтальном направлении, и если бы он, например, должен был по своей симметрии вырасти в виде куба, то в силу вышеописанных явлений он этого сделать не

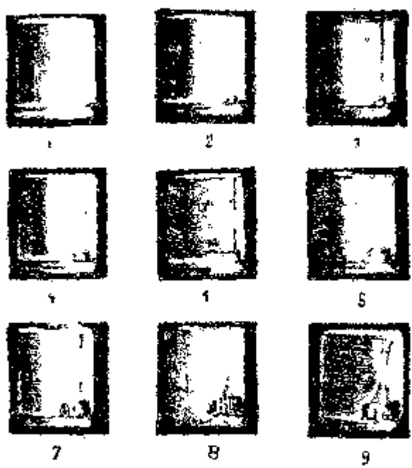

Рис. 88.

может и вытягивается в ширину. При этом, однако, его грани перемещаются параллельно самим себе, так что углы между гранями остаются во все время роста неизменными.

Конечною причиною концентрационных потоков следует признать силу тяжести, так как часть раствора, отложившая избыток твердого вещества на кристалле, устремляется вверх вследствие уменьшения в своем весе. Таким образом, сила тяжести оказывает на внешнюю симметрию кристалла соверпенно такое же влияние, как и на симметрию животных и растений. Для того, чтобы предоставить кристаллу возможность при росте развить всю свою симметрию, необходимо его изъять из влияния тяжести, заключив его в сосуд, вращающийся на горизонтальной оси. Этим способом пользовался автор этих строк для изучения скоростей роста кристаллов по различным направлениям.

Таким образом, по внешнему виду кристалла нельзя бывает непосредственно судить о его симметрии. По каким же признакам мы можем определить эту симметрию? Если мы обратимся к кубу, то заметим, что все его грани тожественны вследствие симметрии этой фигуры. Все выше перечисленные вещества кристаллизуются в кубах, потому что все шесть граней их кристаллов тожественны по своим свойствам и расположены друг относительно друга так, как и грани куба, т. е. взаимно-перпендикулярны. Все дело сводится, значит, к тому, какими способами мы можем удостовериться, что в данном случае все шесть граней действительно одинаковы по своим свойствам. Очевидно, тут решающее значение имеет вовсе не форма граней, а их природа, природа их *поверхности*. Опытный глаз может в громадном большинстве случаев решить, одинакова ли поверхность двух граней кристалла, или нет. Грани бывают более или менее блестящи или матовы, они бывают покрыты неровностями, черточками, и этих особенностей иногда бывает достаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос. Но все же этих признаков иногда недостаточно, и необходимы более точные данные. Мы упомянем здесь о так называемых *фигурах вытравления*, которыми весьма часто и с большим успехом пользуются не только для решения вопроса о тожестве свойств двух граней, но и о степени симметрии самых граней. В большинстве случаев легко отыскать жидкость, которая разъедала бы грани кристалла. Если позволить такой жидкости разъедать грани кристалла в очень слабой степени, то разъедание произойдет только в некоторых точках грани, и в результате этого разъедания окажутся маленькие, в большинстве случаев микроскопические ямки совершенно определенной формы, стоящей в строгом соответствии с симметрией граней. Очевидно, что на одинаковых симметричных друг другу гранях и фигуры вытравления (так называются эти ямки) получатся одинаковые.

На рис. 89 изображены фигуры вытравления, получающиеся на квадратной грани кубического кристалла свинцового блеска. При действии холодной соляной кислоты образуются пирамидальные ямки *a*, при продолжительном действии кислоты сливающиеся друг с другом. Если кислоту разбавить водою, то вместо ямок появляются возвышения, между которыми вещество кристалла вытравляется (*c* и *d*).

Приведем пример, показывающий, каким образом пользуются фигурами вытравления для изучения симметрии кристалла. На шести взаимно перпендикулярных гранях кристаллов хлористого натрия (поваренной соли) получаются тожественные фигуры, показывающие, что все эти грани составляют один куб. Фигуры имеют вид пирамидальных ямок, показанных на рис. 90—91 На этих рисунках и на следующих для наглядности ямка помещена в центре квадратной грани.

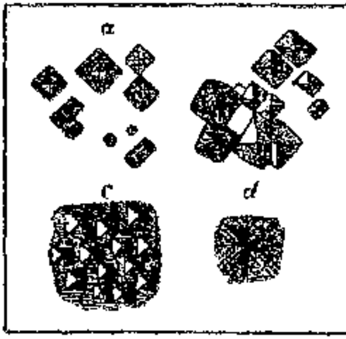

Рис. 89.

Эти фигуры имеют те же линии симметрии, что и грани куба, и своим расположением и видом

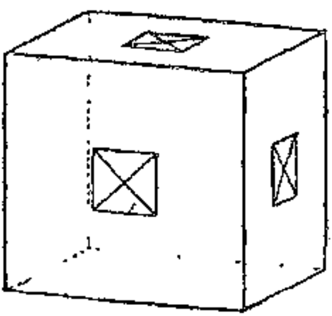

Рис. 90

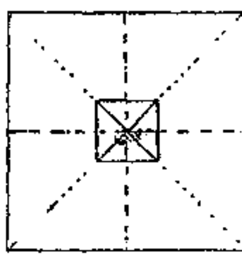

Рис. 91

нисколько не нарушают полной симметрии куба. Все шесть граней кристаллов хлористого калия оказываются также одинаковыми и составляют один куб, но форма фигур вытравления уже иная, чем у поваренной соли фигуры, имея здесь тоже вид четыреугольной пирамидальной ямки, расположены своими сторонами не параллельно ребрам граней, а вкось (рис. 92 и 93). Этим существенно нарушается симметрия граней: провести линии симметрии оказывается уже невозможно, и у граней остается лишь центр вращения четвертого порядка

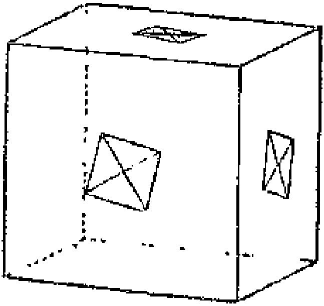

Рис. 92

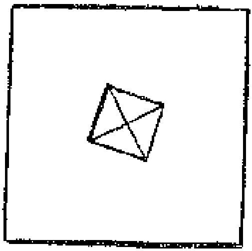

Рис. 93

XIII.

Законы симметрии, общие растениям и кристаллам.

Мы проследили проявление симметрии в мире организмов и в неорганической природе. Мы видели, что подвижность и пластичность тела животных мало гармонирует с неподвижной косностью симметрии. В неподвижных растениях, с более прочными и устойчивыми тканями тела, симметрия выражается значительно резче, и мы можем в листорасположениях с математической точностью постичь ее законы. Наконец, в косном неорганическом веществе кристаллов симметрия находит себе наивысшее осуществление. Мы только что видели, что изучить кристалл какого-нибудь вещества значит, главным образом, изучить его симметрию. Несомненно, что растения по высоте своей симметрии приближаются к кристаллам, и мы постараемся теперь проследить, как далеко распространяется эта близость и в чем именно она выражается.

Выше было сказано, что в основе свойств кристалла лежит пространственная сетка. Каждая грань кристалла может быть представлена плоской сеткой, входящей в состав такой пространственной сетки. Эта сетка по существу своему безгранична, и чтобы получить из нее контуры грани кристалла, ограниченной ребрами, мы можем вырезать часть сетки так, чтобы прямолинейные границы вырезки проходили через узлы сетки (рис. 94).

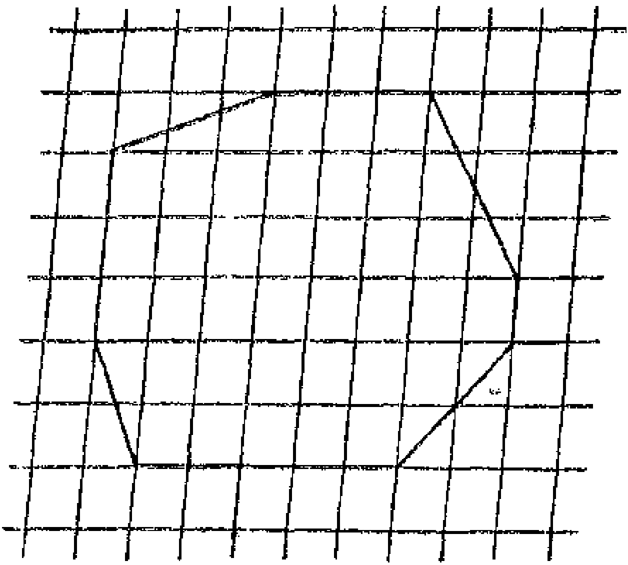

Рис. 94.

Только в этом случае эти границы могут представить в своем относительном расположении расположение ребер, ограничивающих грань кристалла. Очевидно, что можно самым разнообразным способом вырезать по такому правилу грань из одной и той же сетки, и каждый раз мы получим *возможную* форму одной и той же грани одного и того же кристалла. При этом длина отдельной стороны такого многоугольного контура не играет никакой роли, важно лишь ее направление. Итак, *возможное направление кристаллического ребра определяется прямою, проходящею через два узла сетки*, выражающей грань кристалла.

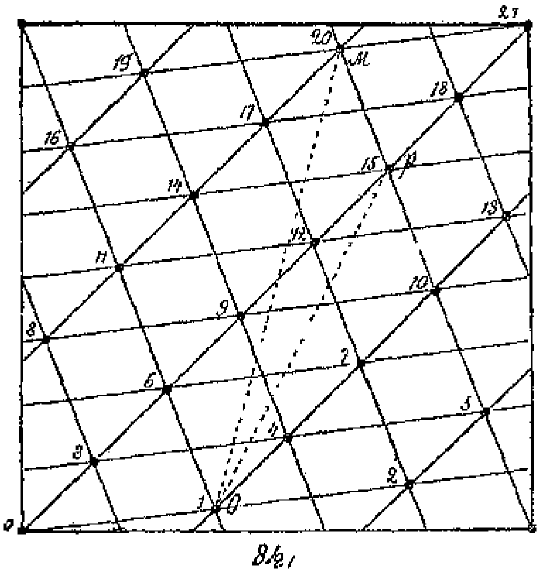

Рис. 95.

Обратимся теперь к растениям и развернем на плоскость поверхность стебля, усаженную листьями или соответствующими им органами. Все винтовые линии превратятся в прямые, и главные парастихи составят плоскую сетку (рис. 95), в узлах которой будут помещаться основания листовых органов. Все другие парастихи будут прямыми, проходящими через два каких-нибудь узла сетки, Мы можем поэтому сказать, что *парастихи располагаются друг относительно друга по тому же закону, по которому располагаются ребра кристалла в его гранях* [1]).

Этот закон справедлив и для неразвернутой поверхности стебля, так как при развертывании цилиндрической поверхности на плоскость углы между парастихами не меняются, когда эти линии выпрямляются. Закон этот испытывает изменение лишь постольку, поскольку сама цилиндрическая поверхность стебля изменяется, а изменяется она иногда очень сильно; в цветах подсолнечника, напр., она превращается в вид тарелки. Но как бы ни изменялась эта поверхность, сущность закона, выражающаяся в сетчатом расположении листовых органов, не изменяется, и аналогия между растениями и кристаллами в этом отношении сохраняет свою силу.

Как закон листорасположения, так и закон кратных отношений в кристаллах имеют себе объяснение. Но природа этого объяснения в том и другом случае совершенно различна.

Для того, чтобы понять сущность закона листорасположения, необходимо рассмотреть самый процесс образования таких органов, как листья. Листья закладываются в почке, форму которой представим схематически в виде короткого цилиндра с шаровым концом. В такой почке зачатки

---

[1]) Следовало бы дополнить еще: *или нормали граней кристалла в его поясах*; мы в тексте не сделали этого дополнения только во избежание необходимости распространяться о нормалях к граням кристалла, о полярной решетке и о поясах кристалла.

одинаковых органов расположены по точкам пересечения двух спиралей, идущих неодинаково круто налево и направо (рис. 96). Витки этих спиралей по мере приближения к верхушке почки все более и более сближаются. Нетрудно видеть в системе этих спиралей известное приближение к плоской сетке, навернутой на цилиндрическую поверхность: по крайней мере, аналогия будет вполне справедлива для нижней части почки.

Рис. 96.

По узлам этой плоской сетки и располагаются зачатки органов, и чем ближе мы подходим к вершине почки, тем моложе эти зачатки и тем более зачаточной оказывается сама пространственная сетка. Самое же сетчатое расположение зачатков обусловливается их скученностью: тесно расположенные одинаковые предметы, при большом их количестве, располагаются сетчато, примером чего может служить расположение зеленых зерен хлорофила в клеточке гороха (рис. 97).

Навернув плоскую сетку на цилиндр, мы получим винтовое расположение ее рядов и узлов. Таким образом, однообразное заложение множества зародышей одинаковых органов в почке осуществляется в виде сетки, как первообраза симметричного рас-

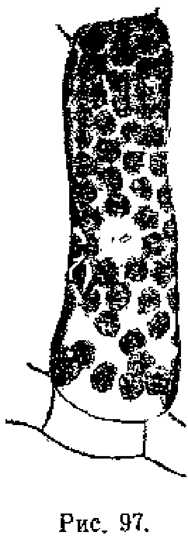

Рис. 97.

положения бесконечного или, в частном случае, очень большого числа одинаковых фигур. Но так как в конечном итоге эти зародыши дают органы, расположенные на поверхности цилиндра, то это расположение должно неизбежно быть винтовым, что на деле и наблюдается в листорасположении.

Итак, для растений мы находим объяснение закона сетчатого расположения в известном заложении зачатков органов, которое можем легко проследить наблюдением. Но что обусловливает сходство грани кристалла с плоской сеткой, а всего кристалла с пространственной решеткой? Здесь мы не видим никаких элементов, сопоставление которых образовало бы кристалл. Но если мы не видим непосредственно, так сказать физиологически, таких элементов, то мы тотчас же увидим их нашим воображением, если поглубже вникнем в дело. Действительно, химия учит нас, что всякое тело состоит из частиц. Химически сложное тело можно делить не беспредельно. Химия учит, например, что поваренная соль состоит из двух химически простых тел, – хлора и натрия. Каждое из этих простых тел состоит из мельчайших частиц. В каждом из этих тел такие частицы имеют один вес и один размер, но вес и размер частиц различен для различных химических простых тел. Эти частицы называют атомами. Один атом натрия, соединяясь *с одним атомом* хлора, дает частицу хлорнстого натрия, или поваренной соли. Поэтому при измельчении поваренной соли мы будем получать все более и более мелкие части этого же вещества только потому, что наши механические средства измельчения грубы. При более совершенных средствах мы дошли бы до частиц хлористого натрия, которые при дальнейшем дроблении распались бы на атомы хлора и натрия. Вот из таких химических частиц и должны, по нашим понятиям, складываться все однородные тела, а в том числе и кристаллы, и для того, чтобы объяснить законы, управляющие формой кристаллов, необходимо предположить, что частицы располагаются в кристалле по узлам пространственной решетки.

Итак, сетчатое расположение частей обусловливает замечательное сходство двух наиболее точно изученных законов, управляющих внешнею формою совершенно различных тел природы - растений и кристаллов.

Можно, пожалуй, указать на одно важное обстоятельство, повидимому, нарушающее описываемое сходство двух законов. В кристаллах мы имеем дело исключительно с рациональными числами, т.-е. числами из ряда натуральных целых чисел, а если встречаются дроби, то это—дроби с целыми числами в числителе и знаменателе. В растениях же мы имеем ряды дробей, дающих в пределе иррациональные величины, выражаемые при помощи действия извлечения корня Эта, повидимому, существенная разница, однакоже, падает при ближайшем рассмотрении дела, а именно очень легко убедиться, что эти иррациональные величины мы найдем в той же плоской сетке.

Пусть рис. 98 представит такую сетку. Сосчитаем, как по канве, вверх 8-й узел от нижнего левого узла, который назовем O, а горизонтально направо 21-й и проведем между узлом O и полученным узлом сетки прямую. Эту прямую мы можем обозначить дробью $^{8}/_{21}$. Заметим, как проходит по сетке наша прямая. Идя от крайнего верхнего узла к узлу O, мы заметим, что эта прямая проходит очень близко от узла, лежащего на пять промежутков выше нижнего края сетки и на тринадцать промежутков вправо от левого

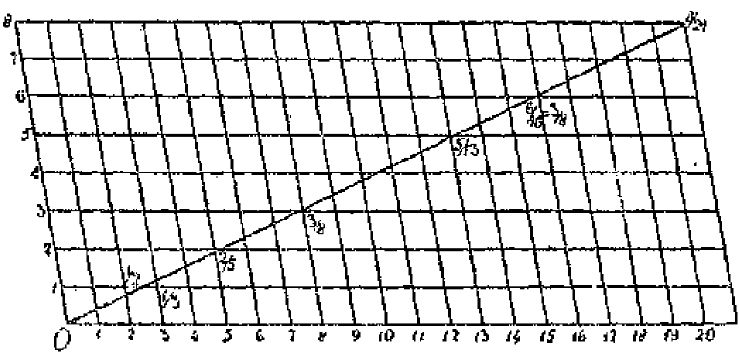

Рис. 95.

края сетки, оставляя этот узел *над* собою. Проведя прямую от угла O до этого узла, мы обозначим ее дробью $^{5}/_{13}$. Идя дальше к узлу O, мы найдем другой близкий узел сетки третий над нижним краем сетки и восьмой в сторону от ее левого края. Этот узел будет *под* прямой $^{8}/_{21}$, и прямая, проведенная к нему от узла O, может быть обозначена дробью $^{3}/_{8}$. Идя еще дальше к узлу O, мы встретим узел второй вверх и пятый вправо по сетке, лежащий *над* прямой $^{8}/_{21}$, определяющий прямую $^{2}/_{5}$. Мы можем таким образом еще найти узлы сетки, лежащие по концам прямых $^2/_3$, $^1/_2$, $^1/_1$, $^0/_1$. Все эти узлы и им соответствующие прямые лежат попеременно над и под прямой $^8/_{21}$ и тем более к ней приближаются, чем далее соответствующий узел находится от узла O. Эти прямые *геометрически* выражают собою подходящие дроби $^0/_1$, $^1/_1$, $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$, $^5/_{13}$, $^8/_{21}$, и мы легко догадаемся, что и самая прямая $^8/_{21}$ есть только подходящая прямая в целом ряду других, бесконечно приближающихся к такой прямой, которая, выходя из узла O, проходит очень близко от узлов сетки, не проходя, однакоже, ни через один из этих узлов, и чем дальше от узла O мы будем итти по этой прямой, тем все ближе и ближе она будет проходить мимо узлов сетки, определяющих подходящие прямые нашего ряда. Значит, наш ряд дробей и число наших подходящих прямых бесконечен и стремится к одной определенной иррациональной величине $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, определяющей нашу предельную прямую. Таким образом, мы приходим к выводу, что именно свойством сеток должно объяснить все особенности закона листорасположения и что поэтому-то мы имеем право настаивать на полной аналогии между этим законом и законом кратных отношений в кристаллах.

XIV.

Симметрия явлений.

Всякое явление происходит в какой-нибудь среде; например, звук может происходить в воздухе, воде, камне, электричество может распространяться по металлической проволоке, свет проходит через стекло, и т. п. Мы даже не считаем пустым пространство, из которого помощью воздушного насоса выкачан воздух, потому что через это пространство свободно проходит свет, распространяются электрические волны, и мы принимаем, что такое пустое, лишенное воздуха пространство все же заполнено особым веществом — световым эфиром. Явления, протекающие в какой-нибудь среде, должны протекать так или иначе в зависимости от этой среды. Так, звук в воде распространяется быстрее, чем в воздухе, свет же, наоборот, в воде распространяется медленнее, чем в воздухе. Металлы являются хорошими проводниками электричества, стекло и смола плохими.

Если мы возьмем кусок вполне однородного стекла, будем сквозь него пропускать лучи света по разным направлениям и измерять скорость распространения света по этим направлениям, то мы не найдем никакой разницы в этой скорости, по какому бы мы направлению ее ни измеряли. Стекло, как говорят, вполне изотропное тело, т.-е. никакой разницы в явлениях, какова бы их природа ни была, мы по разным направлениям в стекле не заметим. То же самое будет и с куском кристалла поваренной или каменной соли по отношению к скорости света. Кристаллы каменной соли окажутся тоже вполне изотропными. Но этого не будет со всяким физическим свойством. Если мы стекло будем сжимать или растягивать по различным направлениям, то заметим, что для одного и того же сжатия или растяжения надо постоянно употреблять одно и то же усилие, в каком бы мы направлении кусок стекла ни сжимали. Если мы прекратим наше усилие, стекло возвратится к своей прежней форме, сжатие или растяжение исчезнут. Мы говорим, что стекло—упругая и притом, изотропная среда. Не то будет с каменною солью. Кристаллы ее оказываются тоже упругими, но уже не изотропными, а, как говорят, анизотропными: в них одно и то же усилие вызовет по различным направлениям вообще различную степень сжатия или растяжения. Оказывается, что кристаллы вообще—анизотропные средины, хотя в некоторых частных случаях и для некоторых явлений они могут оказаться изотропными, как это только что мы видели на кристаллах каменной соли по отношению к свету. Тела, подобные стеклу, изотропные для всех явлений, называются *аморфными* и не обнаруживают никаких признаков, присущих кристаллам. Таких аморфных тел мы знаем немного, громадное же большинство твердых тел кристаллизовано. При ближайшем рассмотрении оказывается, что и стекло нельзя в полном смысле слова и во всех отношениях признать аморфным телом. Подробное изучение свойств упругости стекла привело к необходимости предположить, что оно состоит из весьма малых, невидимых даже в микроскоп кристалликов, совершенно так же, как, в более грубой форме, мрамор состоит из кристалликов известкового шпата. Таким образом, оказывается, что даже стекло, этот классический образчик аморфного тела, в сущности только смесь очень мелких кристалликов, другие же известные аморфные тела представляют или смесь различных тел, мешающих друг другу кристаллизоваться, или же представляют только переходную стадию и со временем кристаллизуются. К первым относятся различные смолы, примером вторых служит аморфный сахар-леденец, со временем мутнеющий от происходящей в нем кристаллизации. Мы приходим к заключению, что твердое тело в нормальном, чистом состоянии должно быть кристаллично. Исходя из этого представления о твердом теле, химики всегда стараются получить свои новые твердые соединения в кристаллах, и, если это не удается им сделать с каким-нибудь телом, они прежде всего подозревают, что это тело еще не окончательно очищено от примесей. В физике сплошь и рядом говорится о явлениях, происходящих в твердых телах, но под этими телами подразумеваются обыкновенно аморфные тела. Мы видим теперь, что это глубоко неверно. Настоящей твердой средой мы должны, согласно вышеизложенному, признать кристаллическое вещество. Физика твердых тел не может быть ничем иным, как *кристаллофизикой*. В этом смысле кристаллография, наука о кристаллах, должна рассматриваться как часть физики, изучающая симметрию твердого вещества, т. е. симметрию той среды, в которой могут происходить физические явления. Для физики в высшей степени важно знать именно симметрию среды, так как от нее зависит весь ход явления. Явление видоизменяется иногда в своих существенных чертах в зависимости от симметрии среды, в которой оно протекает, и есть явления, которые могут наблюдаться только в средах с известной симметрией.

Поясним это таким примером. Вспаханное поле отличается от невспаханного своей симметрией. Тогда как на невспаханном поле все направления одинаковы, вспаханное поле заставляет различать два главные направления под прямым углом друг к другу: одно вдоль, другое поперек борозд. По этим направлениям на вспаханном поле можно провести линии симметрии. Всякий знает, что вдоль борозд итти легче, чем поперек. Конечно, нельзя выразиться, что скорость передвижения по вспаханному полю различна в разных направлениях *вследствие* особой симметрии такого поля. Симметрия, конечно, не служит причиной различия в скоростях. Она служит сама только внешним выражением особых свойств предмета, и мы пользуемся ею, как некоторым наглядным признаком, отражающим в себе внутренние свойства предмета. Об этом было уже говорено выше, когда шла речь о связи асимметрии внешности человека с ненормальностями его психической природы. Как бы то ни было, симметрия настолько существенно выражает внутренние свойства среды, в которой совершается явление, что мы очень часто, не вдаваясь в подробный разбор причины явления, указываем на симметрию, как на причину. Повторяем, что это надо делать с оговорками, о которых было уже сказано.

Попробуем итти по вспаханному полю вкось и тащить за собой какой-нибудь предмет на веревке. Мы тотчас заметим наклонность этого предмета двигаться за нами скачками—сперва вдоль борозд, потом поперек их. Мы ясно заметим, что движение предмета стремится разложиться на две части: одну—по одной линии симметрии, другую—по другой, и все движение предмета, который в конечном результате все же будет следовать за нами, мы будем явственно ощущать как взаимодействие этих двух составляющих движений. Нечто подобное тому, что мы в грубом виде наблюдаем, таща за собою предмет по вспаханному полю, происходит в кристаллах известной степени симметрии. Свет состоит из волн светового эфира, и лучом света мы называем направление распространения световой волны. Колебания частиц эфира, вызывающие волну, происходят поперек луча. Предположим, что световая волна падает отвесно на кристаллическую пластинку, обладающую двумя линиями симметрии. Такую пластинку можно уподобить по симметрии вспаханному полю, а эфирные частицы, которые под влиянием световой волны должны в пластинке прийти в колебание, можно сравнить с предметами, подобными тому, который мы тащим через поле. В результате вся масса захваченных движением эфирных частиц разбивается на две группы, из которых одна колеблется параллельно одной линии симметрии, другая группа—

параллельно другой линии симметрии. Так как направление колебания этих двух групп различно, то и распространяются эти колебания с различной скоростью и мы в результате получим две волны, проходящие через пластинку с различными скоростями, и в соответствии с этим два луча. В этом состоит сущность *двойного лучепреломления*. Если положить пластинку кристалла, в которой разница в скоростях обеих волн достаточно велика, напр., кристалла исландского шпата на печатную строку, то мы увидим эту строку вдвойне. Из предыдущего изложения станет также понятно, что такая пластинка не только раздваивает луч света, но еще и приводит к одному направлению колебания в каждом луче, она, как говорят, *поляризует* каждый из обоих лучей света.

Двойное лучепреломление происходит в средах не со всякой симметрией: среди кристаллов есть пять классов, не обладающих двойным лучепреломлением, из остальных же классов в девятнадцати это явление не может происходить по одному направлению, называемому оптическою осью: идущая по направлению такой оси световая волна не разделяется на две.

Если мы обратимся к распространению теплоты в различных срединах, то тоже заметим, что скорость этого распространения по различным направлениям зависит от симметрии среды. Возьмем пластинку кристалла и покроем ее тонким слоем воска, нагревая пластинку и проводя по ней кусочком воска. Затем, дав пластинке остынуть, нагреем металлическое острие и коснемся им покрытой воском поверхности пластинки. Воск станет плавиться вокруг острия, и расплавленное место будет увеличиваться по мере того, как по пластинке будет распространяться теплота от острия. Расплавленный участок, как показывает наблюдение, имеет форму или круга, или эллипса (овала), смотря по степени симметрии кристалла, из которого вырезана пластинка. Эллиптическая фигура показывает, что теплота распространяется в пластинке с неодинаковой скоростью по различным направлениям.

Наконец упомянем еще об одном интересном отделе явлений, которые могут наблюдаться лишь в средах с известной степенью симметрии. Некоторые кристаллы при изменении своей температуры электризуются и притом так, что на известных, строго определенных их местах появляется положительное, на других же — отрицательное электричество. Это происходит как при нагревании, так и при охлаждении, но знаки зарядов в обоих случаях прямо противоположны: место кристалла, электризующееся, напр., положительно при нагревании, электризуется отрицательно при охлаждении, и наоборот. Это свойство кристаллов электризоваться от перемены температуры называется *пироэлектричеством*. Обыкновенно оба противоположные заряда, возникающие одновременно, располагаются на двух противоположных концах одного и того же направления кристалла. Оказывается, что в этом случае симметрия кристалла должна быть такова, что никаким симметрическим преобразованием нельзя бывает совместить один конец такого направления с другим. Направление это оказывается, как говорят, *полярным*, и оба противоположных заряда располагаются на разных его полюсах.

Мы видим, что в кристаллах, благодаря разнообразию их симметрии, встречаются явления, каких нельзя наблюдать в аморфных срединах. Можно, пожалуй, сказать, что в аморфной среде все явления упрощаются, — не даром же элементарная физика изучает только явления в аморфной среде. Но оказывается, что это не так. Вот что говорит немецкий физик В. Фойгт, всю свою жизнь посвятивший изучению явлений в кристаллах «Своеобразный интерес кристаллофизики покоится, главным образом, на большом разнообразии явлений, наблюдаемых в кристаллах, по сравнению с аморфными твердыми телами»... «Рядом с внушительным богатством явлений бросается в глаза еще и теоретическая сторона дела, придающая кристаллофизике особенную прелесть: кристаллизованное вещество является *нормальным состоянием* твердой материи, *аморфное же—нарушенным* ее состоянием. Поэтому в кристаллическом состоянии оно обнаруживает свои физические свойства в самом чистом и самом совершенном виде, в аморфном же —в мутном и затуманенном».

Но не в одних кристаллических срединах симметрия влияет на ход явлений. Возьмем поверхность стоячей воды, напр., пруда или озера. Ее, как и невспаханное поле, можно считать симметричной по всем направлениям, как спокойный воздух или стекло. Если мы хотим переплыть на веслах такую водную поверхность, то гребем прямо к цели, и лодка движется за веслами. Но если вместо озера или пруда мы возьмем реку, то течение уже обусловливает известную симметрию водного пространства: река будет уже не одинакова поперек и вдоль. Это выразится в том, что лодка, переплывающая реку поперек, не будет двигаться в том же направлении, в котором мы гребем. Точно так же мы знаем, что скорость лодки будет различна по различным направлениям ее движения, несмотря на то, что мы будем грести с одинаковым усилием. В движении лодки мы можем различать причину и следствие. Причина, это—наше усилие, которое имеет, во первых, определенную величину и, вовторых, направление. Следствием нашего усилия будет движение лодки, которое тоже будет иметь известное направление и известную величину; однако, величина эта будет меняться с направлением: по течению она будет больше, чем против него. *Симметрия среды делает то, что постоянная причина (напр., наше усилие) вообще не совпадает по направлению с вызываемым ею следствием (напр., движением лодки), при чем величина этого следствия меняется с направлением.* Это одинаково справедливо как для движения лодки по поверхности проточной воды, так и, напр., для распространения световых колебаний или теплоты в кристаллах; разница лишь в том, что причина явления нам ясна и очевидна в первом случае и скрыта от нас во втором, и для того, чтобы объяснить, почему в кристаллической среде причина не совпадает со своим следствием по направлению и почему следствие меняет свою величину с направлением, мы должны прибегать к предположениям, к так называемым гипотезам.

XV.

Эстетическое значение симметрии [1]).

Хотя значение симметрии в нашем представлении о красоте и не входит в план нашего изложения, но в этой области симметрия играет столь важную роль, что об этом нельзя не сказать хотя бы нескольких слов.

К странице 15 было сделано примечание, в котором говорилось о том, что и в музыке можно видеть симметрию, выражающуюся в *ритме* музыкальных произведений. Ведь в сущности все, что обладает симметрией, мы в праве назвать ритмичным, так как ритм состоит в правильном повторении одинаковых частей в целом, а ведь в этом как мы уже знаем, состоит и симметрия.

Оказывается, что уже одно это повторение во многих случаях действует на нас приятно и про-

Рис. 99.

1) Это небольшое прибавление сделано во втором издании книги.

изводит чувство красоты. Даже некрасивая, геометрически совсем неправильная фигура кажется нам красивой, если она симметрична. На рисунке 99 представлена такая совершенно неправильная фигура, имеющая, однакоже, красивый вид потому лишь, что она симметрична. Эта фигура произве-

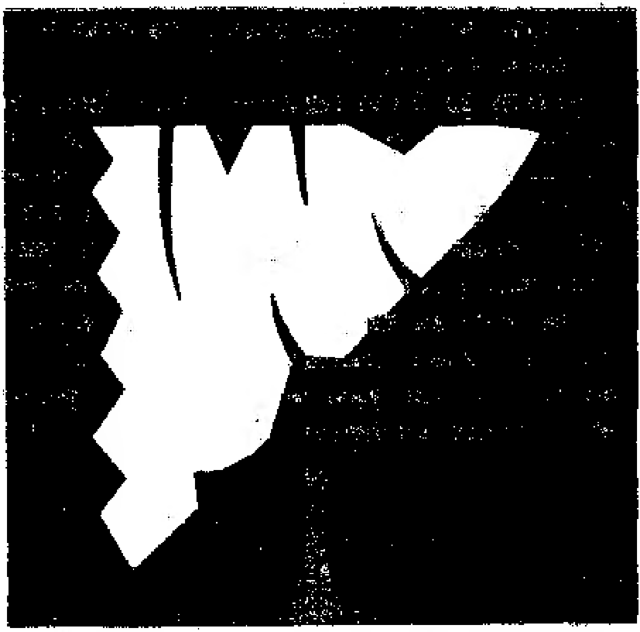

Рис. 100.

дена способом, известным под шуточным названием кляксографии, из чернильной кляксы, расплющенной в сложенной пополам бумажке, при этом клякса дает прихотливые разветвления и становится симметричной по линии, совпадающей с ребром складки.

Другим примером могут служить бумажные салфеточки, вырезанием которых занимают детей. Квадратный кусок бумаги складывается трижды в прямоугольный треугольник, в котором делаются по контуру прихотливые вырезки (рис. 100). Развернув треугольник, мы получаем квадрат, в котором сделанные вырезки располагаются симметрично относительно четырех линий, пересекающихся в центре (рис. 101). Сложенный кусок с вырезками не оставляет в нас никакого чувства удовлетворения, тогда как, развернув его, мы получаем известное впечатление красоты.

Приведенные примеры весьма просты и поэтому особенно убедительно показывают, какое огромное значение имеет симметрия в нашем ощущении красоты.

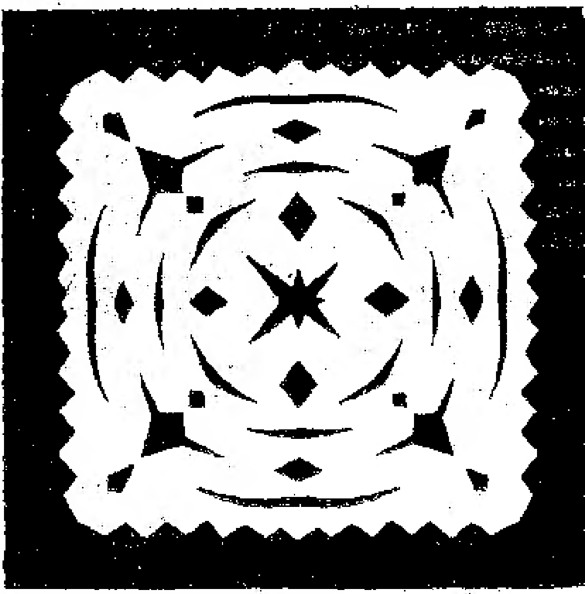

Рис. 101.

ОГЛАВЛЕНИЕ.